Avant-propos

Les **Nouveaux Précis Bréal** sont conçus pour apporter aux étudiants des classes préparatoires une aide efficace dans leur travail.
Ils ont pour objectif de dégager, à travers des énoncés variés et classiques, les méthodes qui permettent la **construction progressive et raisonnée** de la solution d'un exercice ou d'un problème. C'est pourquoi il est souhaitable de les utiliser tout au long de l'année, parallèlement à l'acquisition des connaissances.
Les exercices proposés ont été sélectionnés pour leur représentativité : ils permettent de présenter **l'ensemble des méthodes et des raisonnements** qui, une fois assimilés, doivent permettre de résoudre, sans trop de difficultés, des exercices analogues.

Ce volume traite **l'ensemble du programme de physique de deuxième année MP**.

Chaque chapitre propose une série d'**exercices structurés** dont la **solution** est **très détaillée**, suivis de quelques exercices corrigés de réinvestissement.

Chaque exercice de la première catégorie est caractérisé par :

- un **énoncé** constitué de questions progressives ;
- « **Ce qu'il faut savoir** » : la liste des connaissances – en physique (« Points de cours ») et parfois en mathématiques (« Outils mathématiques ») – nécessaires pour traiter l'exercice ;
- « **Ce qu'il faut comprendre** » : l'analyse qui propose brièvement les chemins à suivre pour répondre efficacement aux questions posées. C'est un moment essentiel dans la recherche de la solution : assez brève, l'analyse doit précéder la mise en œuvre des calculs. Il nous paraît très important que la recherche de la solution passe systématiquement par cette étape. Il n'y a rien de plus stérile que de se lancer dans les calculs sans savoir de façon précise dans quel but ils sont entrepris…
- la solution proprement dite dans laquelle sont souvent rappelés et développés quelques « **Points cours** » dont une bonne compréhension est indispensable. Des « **Points méthodes** » (sur fond grisé) permettent d'affiner la réflexion : il s'agit soit de mises en garde afin d'éviter une erreur fréquente de raisonnement, soit le plus souvent d'explications supplémentaires justifiant le choix d'un théorème ou la pertinence d'un raisonnement. Des « **commentaires** » conduisent à une discussion des résultats obtenus et à une vérification de leur cohérence (recherche de cas ou de valeurs limites, approches différentes pouvant donner un autre éclairage…). Ces commentaires jouent un rôle comparable à l'analyse, mais cette fois après le développement des calculs : c'est une forme de contrôle des résultats obtenus.

Analyse et discussion, qui sont finalement les deux points les plus importants pour le physicien, sont aussi sans doute les étapes les plus difficiles à mettre en œuvre, mais leur bonne prise en compte facilitera considérablement la construction d'une solution structurée (et exacte…) de chaque exercice.

Nous espérons que cet ouvrage aidera les étudiants dans cette voie, dans la perspective d'une réussite aux concours. Nous accueillerons avec reconnaissance les remarques et les critiques des lecteurs, qui peuvent nous être adressées par courrier électronique à l'adresse suivante : **infos@editions-breal.fr**.

Les auteurs

Partie

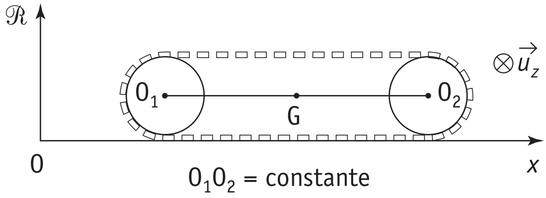
1

Mécanique du solide et des systèmes

101 Engins mécaniques

Partie A

Un bulldozer est modélisé par un ensemble de deux « roues » identiques (de rayon a et de moment d'inertie I par rapport à leurs axes respectifs O_1z et O_2z) d'une chenille de masse m', et d'un chassis.



La masse totale du système est M. On note G son centre de masse.

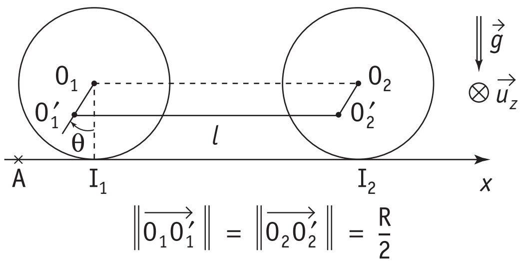
1. L'engin se déplace, dans le référentiel $\mathcal{R}$ lié au sol, à la vitesse $V_0\vec{u}_x$ selon l'axe horizontal Ox. Donner l'expression de son énergie cinétique.

2. Il est propulsé par un moteur qui exerce un couple constant Γ_m sur la roue de centre O_2 ($\vec{\Gamma}_m = \Gamma_m\vec{u}_z$). Déterminer l'accélération γ ($\vec{\gamma} = \gamma\vec{u}_x$) prise par l'engin dans le référentiel $\mathcal{R}$ supposé galiléen (les liaisons d'axes O_1z et O_2z sont parfaites).

Partie B

On considère deux disques homogènes identiques (masse M, rayon R) reliés par une bielle schématisée par une tige homogène $O_1'O_2'$ de longueur l et de masse m.

Les deux disques roulent sans glisser sur le plan horizontal et les liaisons en O_1' et O_2' sont parfaites. Les contacts en I_1 et I_2 sont ponctuels.



On note $J = \frac{1}{2}MR^2$ le moment d'inertie d'un disque par rapport à son axe.

1. Déterminer une équation différentielle du mouvement en $\theta(t)$ et $\dot{\theta}(t)$.

Le référentiel d'étude $\mathcal{R}(A, x, y, z)$ lié au plan horizontal est galiléen.

2. En déduire la période T des petites oscillations du système.

1. Ce qu'il faut savoir

- Composition des vitesses.
- Champ des vitesses d'un solide.
- Théorème de Kœnig de l'énergie cinétique (système matériel fermé quelconque).
- Théorème de la puissance cinétique (ou théorème de l'énergie cinétique).
- Roulement sans glissement ; notion de liaison parfaite.

2. Ce qu'il faut comprendre

A. 1. Pour le calcul de l'énergie cinétique de la chenille, montrer que, dans le référentiel lié à l'engin et se déplaçant à la vitesse $\overrightarrow{V_0}$, tous les points de la chenille ont une vitesse de même module.

2. Les liaisons d'axe (O_1z et O_2z) sont supposées parfaites, la chenille ne glisse pas par rapport aux « roues » et elle adhère complètement au sol. Il sera donc judicieux d'appliquer au système le théorème de la puissance cinétique : seul le couple moteur produit un travail.

B. 1. Les liaisons ($O_1'z$ et $O_2'z$) sont également parfaites et les deux disques roulent sans glisser sur le plan horizontal. Les efforts associés ne créent donc aucun travail, et le système pourra être étudié, là encore, par le biais du théorème de la puissance cinétique.

2. L'étude des petites oscillations suppose que θ et $\dot{\theta}$ peuvent être assimilés à des infiniment petits du premier ordre. On ne conservera donc que les termes du deuxième ordre dans l'équation énergétique établie en **B.1.**

3. Solution

Partie A

1. Le bulldozer constitue un système déformable dont l'énergie cinétique totale dans $\mathcal{R}$ est la somme des énergies cinétiques de la chenille, des roues et du chassis :

$$E_c = E_c)_{\text{chenille}} + E_c)_{\text{roues}} + E_c)_{\text{chassis}}.$$

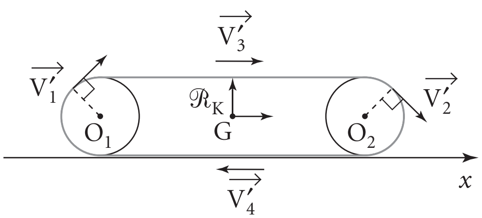
Appliquons le théorème de Koenig en passant par le référentiel du centre de masse $\mathcal{R}_K$ de l'engin.

On a :

$$E_{c_{\mathcal{R}}} = E_{c_{\mathcal{R}_K}} + \frac{1}{2}MV_G^2 = E_{c_{\mathcal{R}_K}} + \frac{1}{2}MV_0^2$$

et $E_{c_{\mathcal{R}_K}} = E_{c_{\mathcal{R}_K}}^{\text{chassis}} + E_{c_{\mathcal{R}_K}}^{\text{chenille}} + E_{c_{\mathcal{R}_K}}^{\text{roues}}$.

- Le chassis est fixe dans $\mathcal{R}_K$ d'où $E_c)_{\mathcal{R}_K}^{\text{chassis}} = 0$.
- Considérons alors la chenille dans $\mathcal{R}_K$:



$\overrightarrow{V'} \equiv$ vitesse dans $\mathcal{R}_K$ des différents éléments de la chenille.

D'autre part, la chenille étant inextensible, il vient :

$$\left\|\overrightarrow{V_1'}\right\| = \left\|\overrightarrow{V_2'}\right\| = \left\|\overrightarrow{V_3'}\right\| = \left\|\overrightarrow{V_4'}\right\| = V'.$$

Pour calculer V′, il suffit de remarquer que la partie de la chenille en contact avec le sol adhère à ce dernier (absence de glissement de la chenille par rapport au sol), de sorte que $\overrightarrow{V_4} = \vec{0}$ vitesse correspondante dans $\mathcal{R}$).

Or $\overrightarrow{V_4} = \overrightarrow{V'_4} + \overrightarrow{V_e} = \overrightarrow{V'_4} + V_0\overrightarrow{u_x}$ (composition des vitesses)

d'où $\vec{0} = \overrightarrow{V'_4} + V_0\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{V'_4} = -V_0\overrightarrow{u_x}$.

Et finalement $V' = V_0$.

Tous les éléments de la chenille ayant, dans $\mathcal{R}_K$, une vitesse de même norme V_0, on a :

$$\boxed{E_c)_{\mathcal{R}_K}^{\text{chenille}} = \frac{1}{2}m' V_0^2}$$

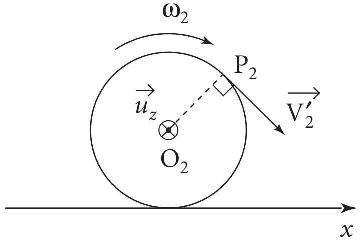
■ Enfin, intéressons nous aux deux roues. Dans $\mathcal{R}_K$, leurs centres de masses O_1 et O_2 sont fixes :

$$\vec{V}(O_1) = \vec{V}(O_2) = V_0\overrightarrow{u_x} \Rightarrow \vec{V}_{\mathcal{R}_K}(O_1) = \vec{V}_{\mathcal{R}_K}(O_2) = \vec{0}.$$

Chaque roue est, dans $\mathcal{R}_K$, en rotation autour de son axe.

On a donc (absence de glissement de la chenille par rapport aux roues) :

$$\overrightarrow{V'_2} = \omega_2\overrightarrow{u_z} \wedge \overrightarrow{O_2P_2} = \omega_2 a\overrightarrow{u_{\theta_2}}.$$



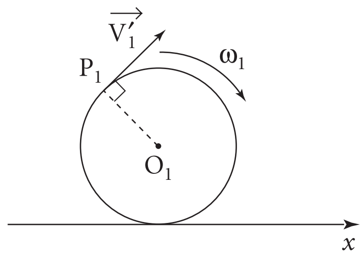
De même :

$$\overrightarrow{V'_1} = \omega_1\overrightarrow{u_z} \wedge \overrightarrow{O_1P_1} = \omega_1 a\overrightarrow{u_{\theta_1}}.$$

Or $\left\|\overrightarrow{V'_1}\right\| = \left\|\overrightarrow{V'_2}\right\| = V_0$, soit : $\omega_1 = \omega_2 = \dfrac{V_0}{a}$.

Dès lors :

$$E_c)_{\mathcal{R}_K}^{\text{roues}} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{deux roues}}}{2} \times \left\{\frac{1}{2}I_{O_2z}\omega^2\right\} = I\omega^2 = \frac{I}{a^2}V_0^2.$$



Point cours

• Un solide en rotation autour d'un axe fixe Δ d'un référentiel d'étude possède, dans ce référentiel, une énergie cinétique E_c telle que :

$$E_c = \frac{1}{2}J_\Delta\omega^2$$

où J_Δ est le moment d'inertie du solide par rapport à cet axe et $\vec{\omega} = \omega\overrightarrow{u_\Delta}$ est le vecteur rotation du solide par rapport à Δ.

■ L'énergie cinétique de l'engin dans $\mathcal{R}_K$ vaut donc :

$$E_{c_{\mathcal{R}_K}} = \frac{1}{2}m' V_0^2 + I\frac{V_0^2}{a^2} \Rightarrow \boxed{E_{c_{\mathcal{R}_K}} = \frac{1}{2}\left(m' + 2\frac{I}{a^2}\right)V_0^2}$$

Et dans $\mathcal{R}$ puisque $E_{c_{\mathcal{R}}} = E_{c_{\mathcal{R}_K}} + \frac{1}{2}M\vec{V}_{\mathcal{R}}^2(G)$:

$$\boxed{E_{c_{\mathcal{R}}} = \frac{1}{2}\left(M + m' + \frac{2I}{a^2}\right)V_0^2} \quad (1)$$

A. 2. Appliquons, dans $\mathcal{R}$ supposé galiléen, le théorème de l'énergie cinétique au système global :

$$\left.\frac{dE_c}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \mathcal{P}_{\mathcal{R}}^{ext} + \mathcal{P}_{\mathcal{R}}^{int} \quad (2)$$

On a $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}^{ext} = \mathcal{P}_{\mathcal{R}}^{ext}(\text{poids}) + \mathcal{P}_{\mathcal{R}}^{ext}(\text{sol} \to \text{chenille})$

or $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}^{ext}(\text{poids}) = 0$ (G garde une altitude constante).

$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}^{ext}(\text{sol} \to \text{chenille}) = 0$ (les maillons en contact avec le sol ayant une vitesse nulle).

D'où : $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}^{ext} = 0$.

D'autre part, les liaisons étant supposées parfaites (liaisons d'axes O_1z et O_2z) et la chenille ne glissant pas par rapport aux roues, il reste :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}^{int} = \mathcal{P}_{moteur} = \Gamma_m\omega.$$

Et d'après (1) : $\left.\frac{dE_c}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left(M + m' + \frac{2I}{a^2}\right)V\gamma$

soit : $\left(M + m' + \frac{2I}{a^2}\right)\gamma V = \Gamma_m\omega$.

Et avec $\omega = \frac{V}{a}$ (condition de non glissement de la chenille par rapport aux roues) :

$$\boxed{\gamma = \frac{\Gamma_m}{a\left(M + m' + \frac{2I}{a^2}\right)}}$$

Cette accélération est d'autant plus grande que le couple moteur Γ_m est important.