COLLECTION ENSEIGNEMENT SUP //// Mathématiques

L2M1

Analyse Complexe et Équations Différentielles

EXERCICES CORRIGÉS

Luís Barreira et Clàudia Valls

EDP SCIENCES

EXERCICES D'ANALYSE COMPLEXE ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Luís Barreira, Clàudia Valls

Traduit par les auteurs

Collection dirigée par Daniel Guin

EDP SCIENCES

17, avenue du Hoggar
Parc d'activités de Courtabœuf, BP 112
91944 Les Ulis Cedex A, France

Édition originale : *Exercicios de análise complexa e equações diferenciais*,
© IST Press, Lisboa, 2009

Imprimé en France

ISBN : 978-2-7598-0616-4

TABLE DES MATIÈRES

AVANT-PROPOS

Ceci est un livre d'exercices d'analyse complexe et équations différentielles. Il vise principalement les étudiants fréquentant un cours donnant la première introduction à l'analyse complexe, aux équations différentielles, ou aux deux domaines. Le contenu et la progression de ces exercices suivent de près le cours [3]. On considère en particulier les nombres complexes, les fonctions holomorphes, les suites, les séries, les fonctions analytiques, les équations différentielles ordinaires. On étudie et on met en œuvre des méthodes pour résoudre équations différentielles et équations aux dérivées partielles. Pour chaque sujet, on a inclu des exercices avec des corrigés complets et des exercices proposés avec indication des résultats. Au total, le livre contient 400 exercices, dont la moitié est constituée d'exercices complètement résolus.

Nous soulignons que ce texte est uniquement destiné à être un auxiliaire dans l'apprentissage des théories évoquées et qu'il ne peut venir qu'en complément de l'étude d'un bon manuel d'analyse complexe et équations différentielles.

Nous sommes très reconnaissants à Agnès Henri (EDP Sciences) pour sa disponibilité et pour son aide, et plus particulièrement à Daniel Guin pour sa révision très attentive de la traduction initiale.

Luís Barreira et Clàudia Valls
Barcelone, janvier 2011

This page intentionally left blank

I

NOMBRES COMPLEXES

Les exercices de ce chapitre portent sur l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, leur addition, multiplication, puissances et racines. On considère également plusieurs fonctions d'une variable complexe, comme l'exponentielle, le cosinus, le sinus et la valeur principale du logarithme.

I.1. Exercices corrigés

Exercice I.1. Calculer $(2+3i)+(5-i)$ et $(2+4i)(3-i)$.

Solution. On a

$$(2+3i)+(5-i) = (2+5)+(3-1)i = 7+2i$$

et

$$(2+4i)(3-i) = (2\cdot 3 - 4\cdot(-1)) + (2\cdot(-1)+4\cdot 3)i = 10+10i.$$

Exercice I.2. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de $(2+i)/(3-i)$.

Solution. En multipliant le numérateur et le dénominateur par le conjugué de $3-i$, on obtient

$$\frac{2+i}{3-i} = \frac{(2+i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{5+5i}{10} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i.$$

Donc,

$$\Re\left(\frac{2+i}{3-i}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \Im\left(\frac{2+i}{3-i}\right) = \frac{1}{2}$$

(voir la Figure I.1).

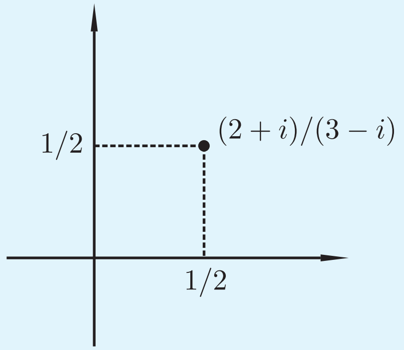

FIGURE I.1. Partie réelle et partie imaginaire de $(2+i)/(3-i)$.

***Exercice* I.3.** Déterminer le module et l'argument de $i^3/(2+i)$.

Solution. Puisque

$$\frac{i^3}{2+i} = \frac{-i(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{-1-2i}{5},$$

on a

$$\left|\frac{i^3}{2+i}\right| = \sqrt{\frac{1}{5^2}+\frac{2^2}{5^2}} = \sqrt{\frac{5}{5^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

et

$$\arg\frac{i^3}{2+i} = \pi + \operatorname{Arctan}\frac{-2/5}{-1/5} = \pi + \operatorname{Arctan} 2,$$

où Arctan est la fonction réciproque de la fonction tangente, à valeurs dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

***Exercice* I.4.** Écrire le nombre complexe $z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$ sous la forme polaire et calculer z^5.

Solution. On a $|z| = \sqrt{2+2} = 2$ et

$$\arg z = \operatorname{Arctan} \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \operatorname{Arctan}(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

Ainsi, $z = 2e^{-i\pi/4}$ et donc

$$z^5 = 2^5 e^{-i5\pi/4} = 32e^{-i5\pi/4}.$$

Exercice I.5. Déterminer les racines cubiques de -4.

Solution. Soit $z = -4$. Puisque $|z| = 4$ et $\arg z = \pi$, on a $z = 4e^{i\pi}$, et donc les racines cubiques de -4 sont

$$w_j = \sqrt[3]{4}e^{i(\pi+2\pi j)/3} = \sqrt[3]{4}e^{i\pi(1+2j)/3}, \quad j = 0, 1, 2.$$

Plus précisément,

$$w_0 = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}, \quad w_1 = -\sqrt[3]{4} \quad \text{et} \quad w_2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$$

(voir la Figure I.2).

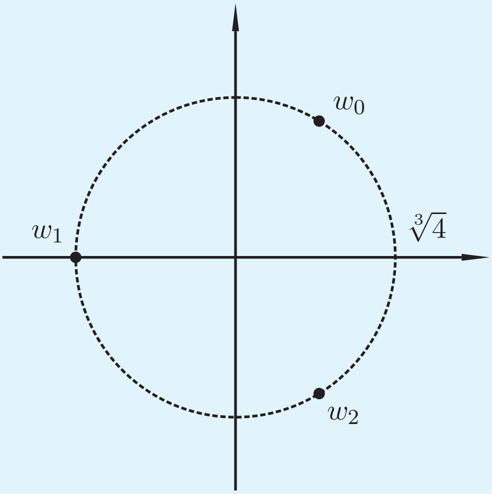

Figure I.2. Racines cubiques de -4.

Exercice I.6. Calculer $\log(-3)$ et $\log(2+2i)$.

Solution. Soit $z = -3$. On a $|z| = 3$ et $\arg z = \pi$, et donc

$$\log(-3) = \log 3 + i\pi.$$

Soit maintenant $z = 2 + 2i$. On a

$$|z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

et

$$\arg z = \operatorname{Arctan} \frac{2}{2} = \operatorname{Arctan} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Donc,

$$\log z = \log(2\sqrt{2}) + i\frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}\log 2 + i\frac{\pi}{4}.$$

Exercice I.7. Calculer $(2i)^{2i}$ et $(-1)^i$.

Solution. Puisque $2i = 2e^{i\pi/2}$, on a

$$\log(2i) = \log 2 + i\frac{\pi}{2}$$

et donc,

$$\begin{aligned}(2i)^{2i} &= e^{2i\log(2i)}\\ &= e^{2i(\log 2 + i\pi/2)}\\ &= e^{i2\log 2}e^{-\pi}\\ &= e^{-\pi}\big[\cos(2\log 2) + i\sin(2\log 2)\big].\end{aligned}$$

D'autre part, puisque $-1 = 1e^{i\pi}$, on a

$$\log(-1) = \log 1 + i\pi = i\pi$$

et donc

$$(-1)^i = e^{i\log(-1)} = e^{i(i\pi)} = e^{-\pi}.$$

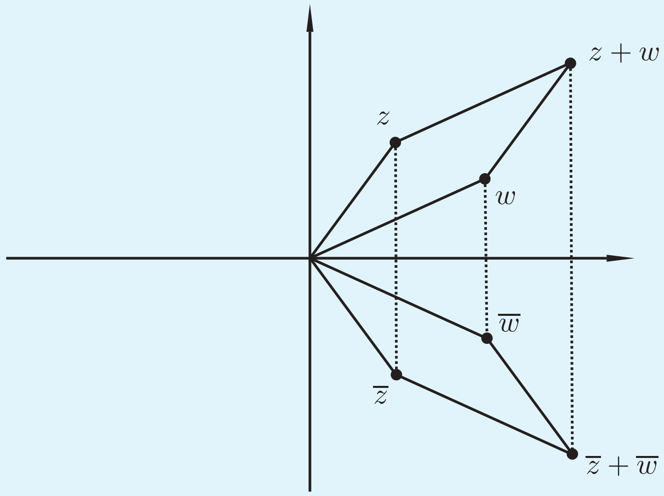

Figure I.3. Les points z, w, $z+w$ et leurs conjugués.

Exercice I.8. Vérifier que $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ (voir la Figure I.3).

Solution. On écrit $z = a+ib$ et $w = c+id$, avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. En prenant leurs conjugués, on obtient alors

$$\overline{z} = a - ib \quad \text{et} \quad \overline{w} = c - id.$$

Donc,

$$\overline{z} + \overline{w} = (a+c) - i(b+d). \tag{I.1}$$

D'autre part,

$$z + w = (a+c) + i(b+d),$$

et donc

$$\overline{z+w} = (a+c) - i(b+d). \tag{I.2}$$

L'identité $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ résulte alors de (I.1) et (I.2).

Exercice I.9. Vérifier que $z\overline{z} = |z|^2$.

Solution. On écrit $z = a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. Alors $\overline{z} = a - ib$, et donc,

$$\begin{aligned} z\overline{z} &= (a+ib)(a-ib) \\ &= (a^2+b^2) + i(a(-b)+ba) \\ &= a^2+b^2 = |z|^2. \end{aligned}$$

Exercice I.10. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de la fonction $f(z) = z^3 + 3$.

Solution. On écrit $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$. On obtient alors

$$z^3 = (x+iy)^3 = x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3$$

et

$$f(z) = (x^3 - 3xy^2 + 3) + i(3x^2y - y^3).$$

Donc,

$$\Re f(z) = x^3 - 3xy^2 + 3 \quad \text{et} \quad \Im f(z) = 3x^2y - y^3.$$

Exercice I.11. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de la fonction $f(z) = \log z$ pour $\Re z > 0$.

Solution. On écrit $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$. Puisque $\Re z > 0$, on a

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{et} \quad \arg z = \operatorname{Arctan} \frac{y}{x},$$

où Arctan est la fonction réciproque de la fonction tangente, à valeurs dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Ainsi

$$\begin{aligned} \log z &= \log|z| + i \arg z \\ &= \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + i \operatorname{Arctan} \frac{y}{x}, \end{aligned}$$

et donc,

$$\Re f(z) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) \quad \text{et} \quad \Im f(z) = \operatorname{Arctan} \frac{y}{x}.$$

Exercice I.12. Déterminer l'ensemble des points $z \in \mathbb{C}$ tels que $2|z| \leq |z-4|$.

Solution. Puisque $|z|$ et $|z-4|$ sont des nombres positifs ou nuls, la condition $2|z| \leq |z-4|$ est équivalente à $4|z|^2 \leq |z-4|^2$. Maintenant, on écrit $z = x+iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. On a alors

$$4|z|^2 = 4(x^2+y^2) \quad \text{et} \quad |z-4|^2 = (x-4)^2+y^2 = x^2-8x+16+y^2.$$

Donc, la condition $4|z|^2 \leq |z-4|^2$ est équivalente à

$$4(x^2+y^2) \leq x^2-8x+16+y^2$$

et aussi à

$$3x^2+8x+3y^2 \leq 16. \tag{I.3}$$

Puisque

$$3x^2+8x = 3\left(x+\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{16}{3},$$

la condition (I.3) est alors équivalente à

$$\left(x+\frac{4}{3}\right)^2 + y^2 \leq \frac{64}{9}.$$

Donc, l'ensemble des points $z \in \mathbb{C}$ tels que $2|z| \leq |z-4|$ est le cercle de rayon $\frac{8}{3}$ centré en $-\frac{4}{3}$ (voir la Figure I.4).

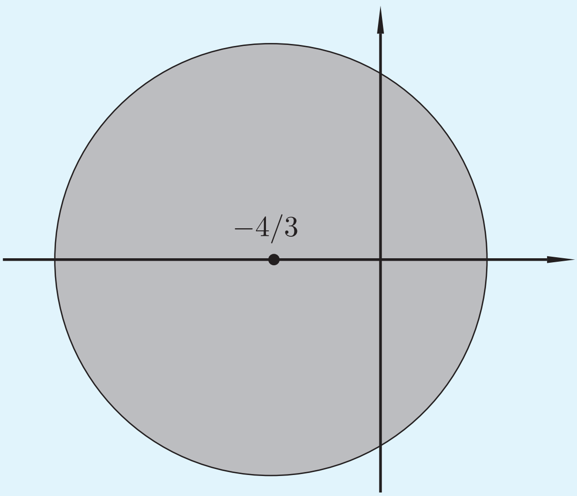

FIGURE I.4. Cercle de rayon $\frac{8}{3}$ centré en $-\frac{4}{3}$.

***Exercice** I.13.* Déterminer l'ensemble des points $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z| = z^2$.

Solution. Soit $z = |z|e^{i\alpha}$. La condition $|z| = z^2$ est équivalente à $|z| = |z|^2 e^{2i\alpha}$. Maintenant, on observe que $z = 0$ est une solution. Pour $z \neq 0$, on obtient la condition équivalente $1 = |z|e^{2i\alpha}$, ce qui donne $|z| = 1$ et $e^{2i\alpha} = 1$ (on rappelle que deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'ils ont le même module et le même argument, à un multiple entier de 2π près). Par conséquent, $\alpha = 0$ ou $\alpha = \pi$, et donc,

$$z = |z|e^{i\alpha} = 1e^{i0} = 1 \quad \text{ou} \quad z = |z|e^{i\alpha} = 1e^{i\pi} = -1.$$

L'ensemble des points $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z| = z^2$ est alors $\{-1, 0, 1\}$.

***Exercice** I.14.* Vérifier que la fonction $z^2 - z$ n'est pas injective et dire si elle est surjective.

Solution. L'équation

$$z^2 - z = z(z-1) = 0$$

a les solutions $z = 0$ et $z = 1$, et donc, la fonction $z^2 - z$ n'est pas injective. D'autre part, elle est surjective, puisque l'équation $z^2 - z = w$ a la solution

$$z = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1+4w}),$$

où $\sqrt{1+4w}$ est une racine carrée de $1 + 4w$.

***Exercice** I.15.* Vérifier que si $z = re^{i\alpha}$ et $w = se^{i\beta}$ sont deux nombres complexes écrits sous la forme polaire, alors $zw = rse^{i(\alpha+\beta)}$.

Solution. On a

$$\begin{aligned} zw &= (r\cos\alpha + ir\sin\alpha)(s\cos\beta + is\sin\beta) \\ &= rs\big[(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta)\big] \\ &= rs[\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)] = rse^{i(\alpha+\beta)}. \end{aligned}$$

***Exercice** I.16.* Résoudre l'équation $\cos z = 2$.

Solution. Soit $w = e^{iz}$. On a

$$\begin{aligned} 0 &= \cos z - 2 \\ &= \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) - 2 \\ &= \frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right) - 2 = \frac{w^2 - 4w + 1}{2w}. \end{aligned}$$

La fonction e^{iz} ne s'annule pas, et donc $w \neq 0$. L'équation $\cos z = 2$ est alors équivalente à $w^2 - 4w + 1 = 0$, qui a les solutions

$$w_1 = \frac{4 + \sqrt{16 - 4}}{2} = 2 + \sqrt{3} \quad \text{et} \quad w_2 = \frac{4 - \sqrt{16 - 4}}{2} = 2 - \sqrt{3}.$$

On obtient ainsi les équations

$$e^{iz} = 2 + \sqrt{3} \quad \text{et} \quad e^{iz} = 2 - \sqrt{3}. \tag{I.4}$$

Soit $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$. On obtient $e^{iz} = e^{-y}e^{ix}$, et les équations dans (I.4) ont respectivement les solutions

$$z = 2\pi k - i\log(2 + \sqrt{3}) \quad \text{et} \quad z = 2\pi k - i\log(2 - \sqrt{3}) \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Exercice I.17. Résoudre l'équation $\cos z = \sin z$.

Solution. Soit $w = e^{iz}$. On a

$$\begin{aligned} 0 &= \cos z - \sin z \\ &= \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) - \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \\ &= \frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right) - \frac{1}{2i}\left(w - \frac{1}{w}\right) \\ &= \frac{1}{2iw}(iw^2 + i - w^2 + 1) \\ &= \frac{1}{2iw}\big((i-1)w^2 + (i+1)\big). \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient l'équation

$$w^2 = -\frac{i+1}{i-1} = i,$$

qui a les solutions

$$w_1 = e^{i\pi/4} \quad \text{et} \quad w_2 = e^{i5\pi/4}.$$

On doit donc résoudre les équations

$$e^{iz} = e^{i\pi/4} \quad \text{et} \quad e^{iz} = e^{i5\pi/4}. \tag{I.5}$$

Soit $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$. On obtient $e^{iz} = e^{-y}e^{ix}$, et les équations dans (I.5) ont respectivement les solutions

$$z = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \quad \text{et} \quad z = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z},$$

que l'on peut aussi écrire sous la forme $z = \frac{\pi}{4} + \pi k$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice I.18. Vérifier que si z et w sont des nombres complexes, alors $e^z e^w = e^{z+w}$.

Solution. On écrit $z = a + ib$ et $w = c + id$, avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Par définition, on a

$$e^z = e^a(\cos b + i \sin b) \quad \text{et} \quad e^w = e^c(\cos d + i \sin d),$$

et il résulte de l'exercice I.15 que

$$\begin{aligned} e^z e^w &= e^a e^{ib} e^c e^{id} = e^{a+c} e^{i(b+d)} \\ &= e^{a+c}\big[\cos(b+d) + i \sin(b+d)\big] = e^{z+w}. \end{aligned}$$

Exercice I.19. Montrer que si $e^{i\theta} \neq -1$, alors

$$\Re \log(1 + e^{i\theta}) = \log\left|2\cos\frac{\theta}{2}\right|.$$

Solution. Puisque

$$\log(1 + e^{i\theta}) = \log|1 + e^{i\theta}| + i \arg(1 + e^{i\theta}),$$

on a

$$\begin{aligned} \Re \log(1 + e^{i\theta}) &= \log|1 + e^{i\theta}| \\ &= \log|1 + \cos\theta + i \sin\theta| \\ &= \log\sqrt{(1 + \cos\theta)^2 + \sin^2\theta} \\ &= \log\sqrt{2 + 2\cos\theta}. \end{aligned}$$

Il résulte alors de l'identité

$$\left|\cos\frac{\theta}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

que

$$\Re\log(1+e^{i\theta}) = \log\left(2\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}\right) = \log\left|2\cos\frac{\theta}{2}\right|.$$

Exercice I.20. Soit $z = x+iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$|\cos z|^2 + |\sin z|^2 = \operatorname{ch}^2 y + \operatorname{sh}^2 y.$$

Solution. On a

$$\begin{aligned}\cos z &= \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \frac{e^{ix}e^{-y}+e^{-ix}e^{y}}{2}\\ &= \frac{1}{2}(e^{-y}\cos x + e^{y}\cos x) + \frac{i}{2}(e^{-y}\sin x - e^{y}\sin x)\\ &= \cos x\operatorname{ch} y - i\sin x\operatorname{sh} y\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sin z &= \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{ix}e^{-y}-e^{-ix}e^{y}}{2i}\\ &= \frac{1}{2}(e^{-y}\sin x + e^{y}\sin x) - \frac{i}{2}(e^{-y}\cos x - e^{y}\cos x)\\ &= \sin x\operatorname{ch} y + i\cos x\operatorname{sh} y.\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}|\cos z|^2 + |\sin z|^2 &= \cos^2 x\operatorname{ch}^2 y + \sin^2 x\operatorname{sh}^2 y + \sin^2 x\operatorname{ch}^2 y + \cos^2 x\operatorname{sh}^2 y\\ &= \operatorname{ch}^2 y + \operatorname{sh}^2 y.\end{aligned}$$

Exercice I.21. Montrer que

$$|z-w|^2 \le \big(1+|z|^2\big)\big(1+|w|^2\big), \quad z, w \in \mathbb{C}.$$

Solution. On a

$$|z-w|^2 \le \big(|z|+|w|\big)^2 = |z|^2 + 2|z|\cdot|w| + |w|^2.$$

D'autre part,

$$0 \leq \left(1 - |z| \cdot |w|\right)^2 = 1 - 2|z| \cdot |w| + |z|^2|w|^2,$$

et on obtient

$$2|z| \cdot |w| \leq 1 + |z|^2|w|^2.$$

Donc,

$$\begin{aligned}|z-w|^2 &\leq |z|^2 + 1 + |z|^2|w|^2 + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 1 + (|z|^2+1)|w|^2 \\ &= \left(1+|z|^2\right)\left(1+|w|^2\right).\end{aligned}$$

Exercice I.22. Vérifier que l'identité $\log(zw) = \log z + \log w$ n'est pas toujours satisfaite.

Solution. Soient $z = r_1 e^{i\theta_1}$ et $w = r_2 e^{i\theta_2}$, avec $r_1, r_2 \geq 0$ et $\theta_1, \theta_2 \in]-\pi, \pi]$. Donc,

$$\log z = \log r_1 + i\theta_1 \quad \text{et} \quad \log w = \log r_2 + i\theta_2,$$

et

$$\begin{aligned}\log z + \log w &= \log r_1 + \log r_2 + i(\theta_1 + \theta_2) \\ &= \log(r_1 r_2) + i(\theta_1 + \theta_2).\end{aligned}$$

D'autre part, puisque $zw = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$, on a

$$\log(zw) = \log(r_1 r_2) + i(\theta_1 + \theta_2 - 2k\pi),$$

où $k \in \mathbb{Z}$ est tel que

$$\theta_1 + \theta_2 - 2k\pi \in]-\pi, \pi].$$

Lorsque $\theta_1 + \theta_2$ n'appartient pas à l'intervalle $]-\pi, \pi]$, on a $\log(zw) \neq \log z + \log w$. Par exemple, si $z = w = -1$, alors

$$\log(zw) = \log 1 = 0 \quad \text{et} \quad \log z + \log w = 2\log(-1) = 2i\pi.$$

Exercice I.23. Déterminer tous les points $z \in \mathbb{C}$ tels que $\log\log z$ soit imaginaire.

Solution. Pour $z \neq 0$, on a

$$\log z = \log|z| + i \arg z,$$

avec $\arg z \in]-\pi, \pi]$. Ainsi, pour $\log z \neq 0$, on obtient

$$\begin{aligned}\log\log z &= \log|\log z| + i\arg\log z\\ &= \log\sqrt{(\log|z|)^2 + (\arg z)^2} + i\arg\log z,\end{aligned}$$

avec $\arg\log z \in]-\pi, \pi]$. Donc, $\log\log z$ est imaginaire si et seulement si

$$\Re\log\log z = \frac{1}{2}\log[(\log|z|)^2 + (\arg z)^2] = 0,$$

c'est-à-dire si et seulement si

$$(\log|z|)^2 + (\arg z)^2 = 1,$$

avec $z \neq 0$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\log|z| = \cos\alpha$ et $\arg z = \sin\alpha$. On obtient $|z| = e^{\cos\alpha}$ et donc,

$$z = |z|e^{i\arg z} = e^{\cos\alpha}e^{i\sin\alpha} = e^{e^{i\alpha}}.$$

On remarque que $z \neq 0$ et que

$$|\log z| = \sqrt{(\log|z|)^2 + (\arg z)^2} = 1 \neq 0.$$

I.2. Exercices proposés

Exercice I.24. Déterminer :

a) la partie réelle de la partie imaginaire de z.

b) la partie imaginaire de la partie réelle de z.

Exercice I.25. Déterminer le module et l'argument du nombre complexe :

a) $i^3 + 1$.

b) $(5 + i6)(1 - i7)$.

c) $(1 + i\sqrt{3})/(1 - i\sqrt{3})$.

d) $(5 + i4)/(2 - i2)^2$.

Exercice I.26. Déterminer les représentations cartésienne et polaire du nombre complexe :

D'une manière analogue, puisque le membre de gauche ne dépend pas de z et le membre de droite ne dépend pas de y, on conclut qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{Y''}{Y} = -\frac{Z''}{Z} + \lambda = -\mu,$$

et donc

$$Y'' + \mu Y = 0 \quad \text{et} \quad Z'' - (\lambda + \mu) Z = 0.$$

D'après les équations

$$X'' + \lambda X = 0, \quad Y'' + \mu Y = 0 \quad \text{et} \quad Z'' - (\lambda + \mu) Z = 0, \tag{VII.60}$$

on obtient une solution de l'équation (VII.58) sous la forme (VII.59). Puisque les combinaisons linéaires des solutions de cette équation sont toujours des solutions, on peut considérer des solutions de la forme

$$u(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, y, z), \tag{VII.61}$$

où

$$u_n(x, y, z) = X_n(x) Y_n(y) Z_n(z),$$

pour certaines fonctions X_n, Y_n et Z_n satisfaisant (VII.60).

Exercice VII.27. Résoudre l'équation (VII.58) pour $t \geq 0$ et $x, y, z \in [0, \pi]$, avec les conditions

$$u(0, y, z) = u(\pi, y, z) = 0, \quad y, z \in]0, \pi[, \tag{VII.62}$$

et

$$u(x, 0, z) = u(x, \pi, z) = 0, \quad x, z \in]0, \pi[. \tag{VII.63}$$

Solution. D'une manière analogue à celle de l'exercice VII.26, on commence par considérer des solutions de la forme $u(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$, ce qui correspond à résoudre les équations dans (VII.60). En substituant la fonction u dans les conditions (VII.62) et (VII.63), on obtient

$$X(0) = X(\pi) = 0 \quad \text{et} \quad Y(0) = Y(\pi) = 0.$$

Il résulte de l'exercice VII.16 que les problèmes

$$X'' + \lambda X = 0 \quad \text{avec} \quad X(0) = X(\pi) = 0,$$

et

$$Y'' + \mu Y = 0 \quad \text{avec} \quad Y(0) = Y(\pi) = 0$$

ont des solutions si et seulement si

$$\lambda = n^2 \quad \text{et} \quad \mu = m^2,$$

avec $n, m \in \mathbb{N}$. Les solutions sont données explicitement par

$$X(x) = a \sin(nx) \quad \text{et} \quad Y(y) = b \sin(my),$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$. La troisième équation dans (VII.60) prend alors la forme

$$Z'' - (n^2 + m^2)Z = 0,$$

qui a les solutions

$$Z(z) = c_{nm} e^{\sqrt{n^2+m^2}z} + d_{nm} e^{-\sqrt{n^2+m^2}z},$$

avec $c_{nm}, d_{nm} \in \mathbb{R}$. On peut alors considérer des solutions de la forme (VII.61), c'est-à-dire,

$$u(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sin(nx) \sin(my) \big(c_{nm} e^{\sqrt{n^2+m^2}z} + d_{nm} e^{-\sqrt{n^2+m^2}z}\big).$$

Exercice VII.28. Indiquer si la méthode de séparation des variables peut être appliquée à l'équation

$$t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \tag{VII.64}$$

Solution. On cherche des solutions de la forme $u(t, x) = T(t)X(x)$. Il résulte de (VII.64) que

$$tTX'' + TXT'X = 0, \tag{VII.65}$$

et donc, pour les solutions avec $TT'X'' \neq 0$, on a

$$\frac{t}{T'} = -\frac{X^2}{X''} = -\lambda,$$

avec $\lambda \neq 0$. On obtient ainsi

$$T' = -\frac{t}{\lambda} \quad \text{et} \quad X'' = \frac{1}{\lambda} X^2.$$