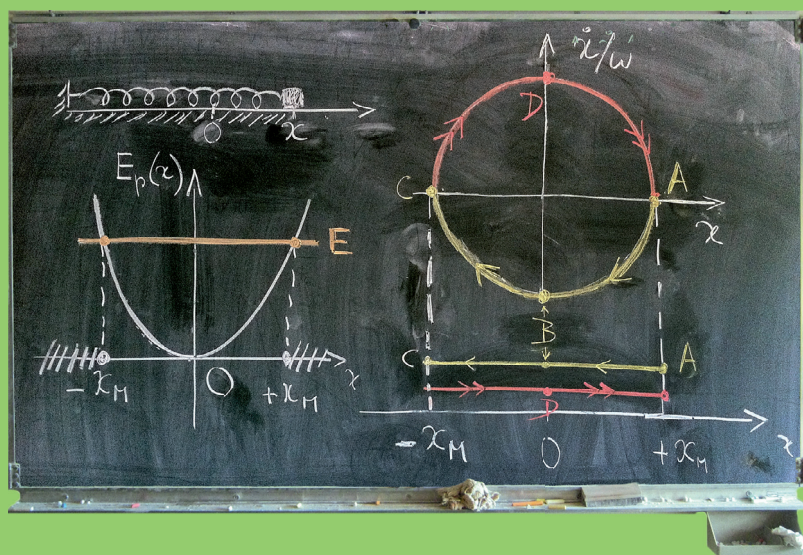


L1 L2

Comprendre la mécanique



Jean-Pierre Romagnan

COMPRENDRE LA MECANIQUE

Jean-Pierre Romagnan

Collection dirigée par Fabrice Mortessagne



17, avenue du Hoggar
Parc d'activités de Courtabœuf, BP 112
91944 Les Ulis Cedex A, France

Illustration de couverture : Trajectoire d'un oscillateur linéaire dans l'espace des phases et dans l'espace réel.

Imprimé en France

ISBN : 978-2-7598-0661-4

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés réservés pour tous pays. Toute reproduction ou représentation intégrale ou partielle, par quelque procédé que ce soit, des pages publiées dans le présent ouvrage, faite sans l'autorisation de l'éditeur est illicite et constitue une contrefaçon. Seules sont autorisées, d'une part, les reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective, et d'autre part, les courtes citations justifiées par le caractère scientifique ou d'information de l'œuvre dans laquelle elles sont incorporées (art. L. 122-4, L. 122-5 et L. 335-2 du Code de la propriété intellectuelle). Des photocopies payantes peuvent être réalisées avec l'accord de l'éditeur. S'adresser au : Centre français d'exploitation du droit de copie, 3, rue Hautefeuille, 75006 Paris. Tél. : 01 43 26 95 35.

© 2011, **EDP Sciences**, 17, avenue du Hoggar, BP 112, Parc d'activités de Courtabœuf,
91944 Les Ulis Cedex A

REMERCIEMENTS

Je remercie Fabrice Mortessagne, Directeur de collection pour l'enseignement de la Physique, de la confiance qu'il m'a témoignée en me proposant d'écrire un ouvrage de Mécanique à l'usage des étudiants de Licence. Ses encouragements et conseils m'ont largement aidé à mener cette tâche à bien. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

Voilà quelques années, nous avons entrepris avec mon collègue Pierre Coulet, de bâtir un cours de Mécanique avec deux objectifs principaux : substituer l'approche géométrique au formalisme différentiel, et faire une large place à la culture scientifique. Pierre a apporté beaucoup d'enthousiasme et d'idées originales à cette entreprise. Il est bien évident que le présent ouvrage, fruit de cette expérience d'enseignement, lui doit beaucoup.

Nicole Ostrowsky, Michel Le Bellac et Jacques Treiner ont bien voulu relire ce manuscrit et me faire part de leurs remarques et suggestions. Je les en remercie chaleureusement.

L'équipe enseignante est constituée par mes collègues Valérie Doya, Frédéric Hébert, Jean-Marc Gilli et de jeunes enseignants, moniteurs ou ATER, Claire Michel, Charles Poli, Guillaume Huillard, Florence Haudin et Amandine Issautier. Je leur suis reconnaissant d'avoir activement participé à la mise au point de ce cours.

Enfin je ne saurais oublier de remercier Bernard Gay Para pour sa disponibilité et l'assistance informatique efficace qu'il m'a apportée.

Vj ku' r ci g' k p v g p v k p p c m { ' i g h v' d r e p m

TABLE DES MATIÈRES

Remerciements	iii
Avant-Propos	xiii
1 Cinématique	1
1.1 Position et trajectoire du mobile	1
1.1.1 Repère	1
1.1.2 Le temps	3
1.1.3 Référentiel	4
1.1.4 Enregistrement d'une trajectoire	4
1.2 Comment le mobile parcourt la trajectoire	5
1.2.1 La vitesse	5
1.2.2 Utilité de la vitesse	9
1.2.3 L'accélération	10
1.3 Représentations du mouvement	13
1.3.1 Représentation temporelle	13
1.3.2 Espace des phases	15
1.4 Composition des mouvements	16
1.4.1 Référentiels en translation	17
1.4.2 Exemple de composition de mouvement : la cycloïde	18
1.5 Base polaire	20
1.6 Compléments sur les trajectoires	23
1.6.1 Rayon de courbure et centre de courbure d'une trajectoire	23
1.6.2 Exemple : la cardioïde	25

1.7	Compléments sur la composition des mouvements	26
1.7.1	Vecteur vitesse angulaire	26
1.7.2	Référentiel en rotation	28
1.7.3	Cas général	30
1.8	Exercices	31
1.9	Réponses aux exercices	34
2	Forces et lois de Newton	39
2.1	La vision aristotélicienne du mouvement	39
2.2	Quelles sont les causes du mouvement ?	41
2.3	Première loi de Newton : principe d’inertie	43
2.3.1	Énoncé	43
2.3.2	Référentiels galiléens ou inertiels	44
2.4	Deuxième loi de Newton : principe fondamental de la dynamique	45
2.4.1	Énoncé	45
2.4.2	Interactions fondamentales	46
2.5	Troisième loi : principe des actions réciproques	48
2.6	Quelques exemples de forces	49
2.6.1	Forces à distance	49
2.6.2	Forces de contact	51
2.7	Construction de Hooke-Newton	55
2.8	Invariance galiléenne	60
2.9	Les référentiels non inertiels en translation	61
2.9.1	Expression de la force d’inertie	62
2.9.2	Cas particulier d’un référentiel en chute libre	64
2.10	Les référentiels non inertiels en rotation	65
2.10.1	Une intuition de forces peu familières	65
2.10.2	Expressions formelles des forces d’inertie	67
2.10.3	Exemple	68
2.11	Complément : effets de la rotation terrestre	69
2.11.1	Champ de pesanteur terrestre	69
2.11.2	Force de Coriolis : déviation vers l’est	71
2.11.3	Pendule de Foucault	73
2.12	Exercices	76
2.13	Réponses aux exercices	82

3	Énergie mécanique	89
3.1	Introduction	89
3.2	Énergie	91
3.3	Le travail	91
3.4	L'énergie mécanique	96
3.4.1	L'énergie cinétique	96
3.4.2	L'énergie potentielle	97
3.4.3	Énergie mécanique et forces conservatives	98
3.4.4	Forces non conservatives	100
3.4.5	Transformations de l'énergie mécanique	100
3.4.6	La puissance	102
3.5	Diagramme d'énergie	102
3.5.1	Nature du mouvement	103
3.5.2	Positions d'équilibre	104
3.6	Compléments : référentiels non inertiels	106
3.6.1	Théorème de l'énergie cinétique	106
3.6.2	Énergie mécanique	108
3.6.3	Diagramme d'énergie	110
3.7	Exercices	113
3.8	Réponses aux exercices	117
4	Oscillateur mécanique	121
4.1	Introduction	121
4.2	Oscillateur libre harmonique	122
4.2.1	Équation harmonique	123
4.2.2	Amplitude et phase	124
4.2.3	Énergie de l'oscillateur harmonique	125
4.2.4	Représentation dans l'espace des phases	125
4.2.5	Oscillations harmoniques électriques	126
4.3	Oscillateur libre non linéaire	127
4.4	Oscillateur amorti	129
4.4.1	Approche qualitative	129
4.4.2	Oscillateur harmonique amorti	131
4.5	Oscillateur forcé	135
4.5.1	Approche qualitative : forçage impulsionnel	136
4.5.2	Forçage sinusoïdal	141
4.6	Exercices	148
4.7	Réponses aux exercices	155

5	Quantité de mouvement et centre de masse	163
5.1	Introduction	163
5.2	Quantité de mouvement	164
5.2.1	Quantité de mouvement d'une masse ponctuelle . . .	164
5.2.2	Collision et transfert de quantité de mouvement . . .	164
5.2.3	Choc mou	166
5.2.4	Collisions élastiques	166
5.3	Force moyenne subie lors d'un choc	168
5.3.1	Traumatologie	168
5.3.2	Pression d'un gaz parfait	169
5.4	Système de masses ponctuelles	170
5.4.1	Évolution de la quantité de mouvement d'un système	170
5.4.2	Phénomènes de recul	172
5.4.3	Propulsion par réaction	174
5.5	Centre de masse d'un système	175
5.5.1	Définition du centre de masse	175
5.5.2	Mouvement du centre de masse	177
5.6	Référentiel du centre de masse	179
5.6.1	Propriétés du référentiel du centre de masse	180
5.6.2	Problème à deux corps	182
5.6.3	Expression de l'énergie en fonction de la masse réduite	185
5.7	Exercices	186
5.8	Réponses aux exercices	191
6	Une brève histoire de la mécanique céleste	199
6.1	Le modèle géocentrique	199
6.2	L'alternative copernicienne	200
6.3	Tycho-Brahé et Kepler	201
6.4	Galilée	203
6.5	Newton	204
7	Gravitation	209
7.1	Définition de la force gravitationnelle	209
7.2	Propriétés de la force gravitationnelle	211
7.2.1	La force gravitationnelle est conservative	211
7.2.2	La force gravitationnelle conserve le moment angulaire	212
7.3	Mouvement sous l'action de la force gravitationnelle	215
7.3.1	Utilité des lois de conservation	216
7.3.2	Nature de la trajectoire en fonction de l'énergie E . .	217
7.3.3	Influence de la valeur du moment angulaire	218

7.4	Paramètres de la trajectoire	220
7.4.1	Équation de la trajectoire en coordonnées polaires	220
7.4.2	Trajectoires elliptiques : $e < 1$	221
7.4.3	Trajectoires hyperboliques : $e > 1$	222
7.5	Exemples d'applications	224
7.5.1	Mise en orbite des satellites	224
7.5.2	Étoile binaire	225
7.5.3	Le système Terre-Lune	229
7.5.4	Complément : effet de marée	231
7.6	Invariant de Runge-Lenz	235
7.7	Principales données du système solaire	237
7.8	Exercices	237
7.9	Réponses aux exercices	242
8	Éléments de mécanique du solide	249
8.1	Solide en rotation autour de son axe de symétrie fixe	250
8.1.1	Énergie cinétique de rotation	250
8.1.2	Moment angulaire du solide	251
8.1.3	Évolution temporelle du vecteur \vec{J}	252
8.1.4	Exemples d'applications	252
8.2	Calcul d'un moment d'inertie	255
8.2.1	Propriétés du moment d'inertie	255
8.2.2	Moments d'inertie d'un cerceau	257
8.2.3	Moments d'inertie d'un disque mince	257
8.2.4	Moments d'inertie d'une sphère	258
8.3	Expression générale du moment angulaire	259
8.4	Évolution temporelle du moment angulaire	261
8.4.1	Relation fondamentale	261
8.4.2	Précession d'une toupie symétrique	261
8.4.3	Vitesse angulaire de précession	262
8.5	Expression de l'énergie cinétique de rotation	264
8.6	Mouvement général d'un solide dans l'espace	265
8.6.1	Vitesse angulaire de rotation d'un solide	265
8.6.2	Axe de rotation instantanée	266
8.6.3	Moment angulaire par rapport au centre de masse	267
8.6.4	Décomposition de l'énergie cinétique	269
8.7	Exemples d'applications	270
8.7.1	Cône roulant sans glisser sur un plan	270
8.7.2	Stabilité de la rotation libre autour du centre de masse	271

8.8	Exercices	273
8.9	Réponses aux exercices	279
9	Ondes mécaniques	287
9.1	Perturbation d'un milieu matériel	288
9.1.1	Mécanisme de propagation d'une perturbation	288
9.1.2	Description de la propagation	289
9.2	Onde sinusoïdale	291
9.2.1	Périodicité spatiale et temporelle	291
9.2.2	Fronts d'onde	292
9.2.3	Équation de propagation	293
9.3	Superposition de deux ondes	294
9.3.1	Principe de superposition	294
9.3.2	Interférences	295
9.3.3	Ondes stationnaires	296
9.4	Onde transversale progressive dans une corde	298
9.4.1	Vitesse de propagation de l'onde transversale	298
9.4.2	Énergie mécanique associée à l'onde transversale	299
9.4.3	Puissance fournie par la source.	301
9.4.4	Réflexion et transmission de l'onde à l'interface entre deux milieux	301
9.4.5	Expressions des amplitudes réfléchié et transmise	302
9.4.6	Onde progressive amortie	305
9.4.7	Effet de la rigidité de la corde	306
9.5	Amplitudes des harmoniques d'une corde	307
9.5.1	Amplitudes des modes propres	307
9.5.2	Énergie mécanique associée à un mode propre	308
9.5.3	Exemple de corde pincée : la harpe	309
9.5.4	Exemple de corde frappée : le piano	310
9.6	Exercices	310
9.7	Réponses aux exercices	314
10	Outils mathématiques	319
10.1	Dérivée	319
10.1.1	Fonction d'une seule variable	319
10.1.2	Dérivée d'une fonction de fonction	319
10.1.3	Dérivées partielles	320
10.1.4	Gradient	320

10.2	Développement de Taylor	321
10.2.1	Fonctions usuelles	321
10.2.2	Vecteurs	323
10.3	Éléments de calcul vectoriel	323
10.3.1	Définition d'un vecteur	323
10.3.2	Somme de deux vecteurs	323
10.3.3	Produit scalaire de deux vecteurs	324
10.3.4	Produit vectoriel de deux vecteurs	324
10.3.5	Barycentre	326
10.3.6	Coniques	327

Vj ku' r ci g' k p v g p v k p p c m { ' i g h v' d r e p m

AVANT-PROPOS

Si la Mécanique Newtonienne occupe une place importante dans l'enseignement de Physique dispensé aux étudiants inscrits en première année de Licence, ce n'est pas seulement à cause de son statut de discipline fondatrice de la Physique moderne. La Mécanique doit être enseignée dès la première année parce qu'elle offre la possibilité d'illustrer de façon très concrète des concepts fondamentaux (comme l'utilité des lois de conservation) et des phénomènes très généraux que l'on retrouve dans bien d'autres domaines de la Physique (tels que les oscillations, la résonance, les effets non-linéaires). C'est donc à ce titre un enseignement très formateur pour un futur physicien.

Il faut cependant reconnaître que cet enseignement a longtemps été présenté dans le cadre d'un formalisme mathématique que la majorité des nouveaux bacheliers est aujourd'hui loin de maîtriser complètement. Pour s'adapter à son auditoire, l'enseignant se doit donc de proposer une nouvelle présentation, attractive, moins formelle, mais qui permette néanmoins de dégager les idées physiques essentielles. C'est dans cet esprit que cet ouvrage, fruit d'une expérience d'enseignement de plusieurs années, a été écrit.

Chacun des chapitres débute par une approche qualitative qui permet à l'étudiant d'appréhender à travers des expériences et de nombreux exemples, les idées physiques fondamentales qui sous-tendent les phénomènes observés. La construction graphique de trajectoires ou l'utilisation de l'espace des phases pour décrire les oscillations forcées constituent de bons exemples de cette démarche qui utilise largement les constructions géométriques. Une fois ces notions de base acquises, le lecteur trouvera dans la seconde partie de chacun de ces chapitres une description formelle des phénomènes, ainsi que des compléments qui seront utiles aux étudiants souhaitant préparer des concours. C'est en pensant à eux qu'un chapitre sur la Mécanique des solides et un chapitre sur les Ondes mécaniques ont été ajoutés à ce cours de Mécanique du point matériel.

Chaque chapitre se termine par une série d'exercices et problèmes (accompagnés de solutions détaillées) qui permettront à l'étudiant de vérifier qu'il a bien assimilé les notions essentielles. Enfin dans le chapitre Outils Mathématiques, le lecteur trouvera un rappel des notions mathématiques de base indispensables.

CINÉMATIQUE

Étudier un mouvement c'est d'abord le décrire puis en identifier les causes. **La cinématique a pour objet de le décrire**, ce qui revient à répondre à deux questions :

- quelle est la trajectoire du mobile ? Pour la définir il faut être capable de déterminer sa position à chaque instant ;
- comment le mobile parcourt-il cette trajectoire ? Son vecteur vitesse et son vecteur accélération nous le diront.

Position, trajectoire, vitesse et accélération sont des notions fondamentales que nous allons définir en montrant comment elles sont intimement liées.

Mais il faut prendre conscience que la description d'un mouvement ne vaut que pour celui qui l'observe. Il faudra donc soigneusement préciser de quel observateur on va traduire le point de vue, ce qui nous conduira à définir la notion de référentiel.

Nous nous limiterons dans ce chapitre à la cinématique du point matériel, c'est-à-dire à l'étude d'un mobile dont la position sera entièrement définie par les coordonnées d'un point.

1.1. Position et trajectoire du mobile

1.1.1. Repère

Le mouvement d'un objet n'existe que défini par rapport à un autre objet qui lui sert de référence. Je marche dans une pièce et suis en mouvement par rapport

à la chaise que je viens de quitter, mais pas par rapport au livre que je tiens à la main et qui partage mon mouvement. Si dans le langage courant nous omettons quasi systématiquement de préciser cette référence en nous contentant de dire « je roulais à 80 km/h », c'est qu'implicitement nous définissons notre mouvement par rapport à la Terre. Mais la Terre est en mouvement par rapport au Soleil, qui lui-même se déplace par rapport au centre de notre galaxie, qui elle-même se déplace par rapport aux autres galaxies. . . Comme l'avait bien compris Galilée, **il n'existe pas de mouvement absolu, pas davantage de repos absolu.**

Le mouvement d'un objet n'existe donc que par rapport à un autre objet qui en est privé, et qui lui sert de référence : lorsque je suis le passager d'une voiture, j'ai le même mouvement qu'elle (je partage son mouvement) et pour moi elle est immobile⁽¹⁾. Je ne suis par conséquent pas le bon objet de référence par rapport auquel on peut définir le mouvement de la voiture. Si je veux étudier le mouvement d'un mobile M , je dois le faire par rapport à un autre objet qui n'est pas animé du même mouvement que M , et c'est cet autre objet que je choisis comme **origine** O . La position du mobile M est alors repérée par le vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ qu'il est commode de définir par ses coordonnées (figure 1.1).

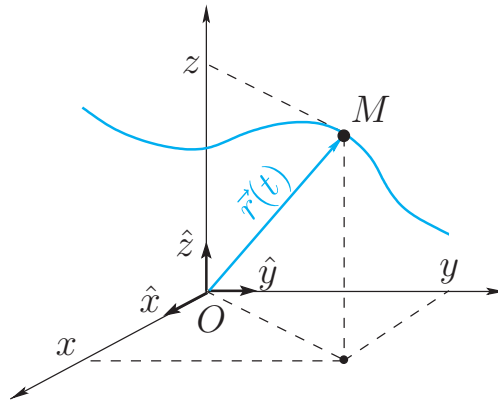


FIGURE 1.1. Vecteur position dans une base cartésienne. L'ensemble des positions du mobile définit sa trajectoire, en vert.

Pour ce faire il faut définir trois vecteurs unitaires⁽²⁾ et orthogonaux entre eux (une **base orthonormée** disent les mathématiciens). Ce choix n'est pas unique.

⁽¹⁾Passager d'une voiture animée d'un mouvement rectiligne uniforme, si j'ai conscience de son mouvement c'est en regardant à l'extérieur un bâtiment ou un arbre, ou quelque autre objet n'ayant pas le mouvement de la voiture.

⁽²⁾Les vecteurs unitaires ont un module égal à un. Nous les noterons avec un accent circonflexe : par exemple \hat{x} est le vecteur unitaire associé à l'axe $x'Ox$.

Celui qui vous est le plus familier est l'ensemble de trois vecteurs unitaires **fixes**, notés \hat{x} , \hat{y} , \hat{z} , qui constituent ce que l'on appelle une base cartésienne⁽³⁾. Le vecteur position \vec{r} s'écrit alors :

$$\boxed{\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}} \quad (1.1)$$

en notant x, y , et z ses trois coordonnées algébriques. L'origine O , et la base qui lui est associée, constituent un **repère** qui permet de repérer la position du mobile M . L'ensemble de ces positions constitue la **trajectoire** du mobile (en vert sur la figure 1.1).

1.1.2. Le temps

La seule connaissance de l'ensemble des positions du mobile (sa trajectoire dans l'espace) ne suffit pas pour décrire son mouvement. Pour déterminer comment le mobile décrit sa trajectoire, il faut aussi connaître à quel instant il occupe une position donnée. La mesure du temps est un problème qui s'avérera délicat en relativité, comme vous le découvrirez plus tard⁽⁴⁾. Mais **en mécanique classique le temps est absolu et universel**. Sa mesure ne pose pas de difficultés particulières si l'on dispose d'une mesure de temps appelée horloge. Une horloge utilise un phénomène périodique, depuis les oscillations mécaniques du balancier d'une pendule, en passant par les oscillations électriques du cristal de quartz de votre montre, jusqu'aux horloges atomiques dont la précision relative est de l'ordre de 10^{-14} , soit une seconde pour trois millions d'années! Une horloge permet d'associer un temps t à chaque position du mobile tout au long de son mouvement. On définit ainsi le vecteur position $\vec{r}(t)$ et ses coordonnées $x(t), y(t), z(t)$ dans la base choisie. Dès lors on est en mesure de préciser la façon dont le mobile décrit sa trajectoire, ce qui est essentiel, car **à une même trajectoire peuvent correspondre différents mouvements**. Comme vous le savez sans doute déjà, une trajectoire rectiligne peut en effet être parcourue soit à vitesse constante (mouvement rectiligne uniforme), soit avec une vitesse qui varie linéairement en fonction du temps (mouvement rectiligne uniformément varié), soit avec une vitesse qui dépend périodiquement du temps (mouvement rectiligne oscillant, de l'extrémité d'un ressort par exemple)... soit de bien d'autres façons!

⁽³⁾Dans la partie « Compléments » nous aborderons le cas des vecteurs de base qui ne sont pas fixes.

⁽⁴⁾En relativité, l'intervalle de temps séparant deux événements varie d'un référentiel à un autre, ce que le système GPS prend en compte pour atteindre sa précision actuelle.

1.1.3. Référentiel

Un **observateur**, muni d'un repère et d'une horloge, définit un **référentiel**. Cet observateur aura une perception du mouvement d'un mobile, mais il est clair qu'un second observateur attaché à un autre référentiel percevra différemment ce même mouvement. Par exemple, un observateur immobile par rapport au Soleil voit les planètes décrire des orbites régulières autour du Soleil. Pour la Terre et Vénus ces orbites sont, comme nous le verrons au chapitre 7, quasi circulaires (figure 1.2a), mais décrites avec des vitesses angulaires différentes : lorsque Vénus effectue un tour complet autour du Soleil, la Terre n'effectue que 0,61 tour. Le point de vue d'un observateur terrestre est tout à fait différent (figure 1.2b) : il est immobile dans le référentiel qui lui est attaché, et c'est le Soleil qui tourne autour de lui. Qui plus est, le mouvement des planètes qu'il observe a perdu sa régularité : d'une part parce que la distance Terre-Vénus varie, d'autre part parce que Vénus paraît revenir sur ses pas lorsqu'elle double la Terre, ce que l'on qualifie de mouvement rétrograde. Ce sont les irrégularités de leurs mouvements observés depuis la Terre, qui ont d'ailleurs valu leur nom aux planètes, planète étant synonyme d'astre errant. Il est donc **essentiel de toujours définir le référentiel dans lequel est décrit le mouvement d'un mobile**. Comment concilier les points de vue de deux observateurs liés respectivement à deux référentiels différents, et passer d'un point de vue à l'autre, est un problème important en Physique. Nous l'aborderons dans ce chapitre et nous y reviendrons au chapitre suivant. Nous avons déjà mentionné qu'en mécanique classique le temps est absolu, ce qui signifie que des observateurs liés à des référentiels différents **mesurent tous le même intervalle de temps entre deux événements**⁽⁵⁾.

1.1.4. Enregistrement d'une trajectoire

Le suivi de la position d'un mobile peut faire appel à des techniques très différentes pouvant aller du radar au GPS pour les objets macroscopiques (de l'avion au piéton), aux chambres à étincelles pour les particules élémentaires. Toutefois dans l'apprentissage de l'étude du mouvement, en salle de travaux pratiques, on utilise habituellement des techniques moins sophistiquées qui ne repèrent pas la position du mobile à tout instant, mais à des intervalles de temps réguliers notés Δt . Bien évidemment, plus Δt sera petit par rapport à la durée totale du

⁽⁵⁾ Ce qui ne sera plus le cas dans le cadre de la relativité restreinte et de la relativité générale d'Einstein.

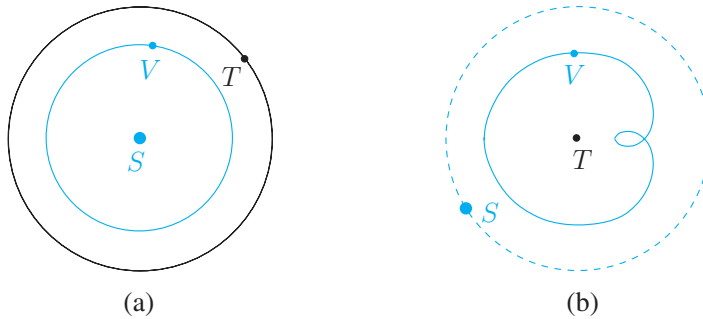


FIGURE 1.2. (a) Orbites (quasi circulaires) décrites par la planète Vénus et la Terre pour un observateur lié au Soleil. (b) Pour un observateur terrestre, le Soleil décrit une orbite circulaire centrée sur la Terre, mais la trajectoire de Vénus est plus complexe. Notamment Vénus paraît revenir sur ses pas lorsqu'elle double la Terre, c'est le mouvement rétrograde qui a tellement intrigué les observateurs du ciel.

mouvement, plus précisément sera définie sa trajectoire. Selon la technique utilisée pour réaliser ces mesures, Δt sera le plus fréquemment :

- soit la période avec laquelle un palet auto-porteur marque sa position sur une table de mécanique ;
- soit la période des très brefs éclairs lumineux qui éclairent le corps en mouvement dans le champ d'un appareil photographique, on parle alors de mouvement stroboscopé.

Sur le document obtenu on choisira une origine O (point quelconque ou position initiale du mobile), et il suffira de définir deux vecteurs de base (nous sommes dans un plan), le plus souvent orthonormés et fixes. On aura ainsi défini le repère utilisé par l'expérimentateur pour décrire le mouvement. Le référentiel lié à cet expérimentateur, généralement immobile dans la salle d'expérience, est appelé **référentiel du laboratoire**.

1.2. Comment le mobile parcourt la trajectoire

1.2.1. La vitesse

Au cours de son mouvement, le vecteur position du mobile varie. Si l'on repère par $\overrightarrow{OM} = \vec{r}(t)$ et $\overrightarrow{ON} = \vec{r}(t + \Delta t)$ les vecteurs position du mobile aux instants respectifs t et $t + \Delta t$, il apparaît (figure 1.3) que $\vec{r}(t + \Delta t) = \vec{r}(t) + \overrightarrow{\Delta r}$ en notant

Exercice 9.4.

1.a) L'allongement du ressort est défini par $F = k(L - L_0)$, et l'énergie potentielle qu'il emmagasine $E_p = \frac{1}{2}k(L - L_0)^2$.

b) Le ressort est à l'équilibre. La partie du ressort dessinée en noir sur la figure 9.17 est immobile et donc soumise à une force résultante nulle. La partie verte exerce donc la force $-\vec{F}$ sur la partie noire. Et en vertu de la troisième loi de Newton, la partie noire exerce la force \vec{F} sur la partie verte. Le même raisonnement s'applique en tout point du ressort.

c) Lorsque le ressort est au repos les spires sont équidistantes et séparées par une distance a . Si le ressort comporte N spires, $L_0 = Na$. Lorsque le ressort est étiré, ses spires sont toujours équidistantes mais séparées par une distance b , donc $L = Nb$. Par conséquent $(L - L_0)/L_0 = (b - a)/a$. Si la partie du ressort dessinée en vert comporte n spires, $l_0 = na$ et $l = nb$. Donc $(L - L_0)/L_0 = (l - l_0)/l_0$. La force F qui nous l'avons vu s'exerce sur la partie verte du ressort s'écrit $F = (kL_0/l_0)(l - l_0)$. Cette force est bien proportionnelle à l'allongement de cette partie du ressort, mais la raideur à prendre en compte est inversement proportionnelle à la longueur l_0 de ressort considérée. L'énergie potentielle e_p emmagasinée par une partie du ressort est proportionnelle à sa longueur au repos soit :

$$e_p = (l_0/L_0)E_p \text{ soit } e_p = \frac{1}{2}(kL_0/l_0)(l - l_0)^2.$$

2.a) Considérons un élément de ressort qui avant le passage de l'onde est situé entre x et $x + dx$. La force résultante (non nulle au passage de l'onde) qui s'exerce sur lui est $dF = kL_0[(\partial\xi/\partial x)_{(x+dx)} - (\partial\xi/\partial x)_x] = kL_0(\partial^2\xi/\partial x^2)dx$. La relation fondamentale de la dynamique appliquée à cet élément de ressort s'écrit : $kL_0(\partial^2\xi/\partial x^2)dx = \mu dx(\partial^2\xi/\partial t^2)dx$. On reconnaît l'équation d'onde et par identification on trouve $c^2 = kL_0/\mu$.

b) L'énergie cinétique d'un élément de ressort de longueur dx s'écrit, par définition, $dE_c = \frac{1}{2}\mu dx(\partial\xi/\partial t)^2$.

c) Comme l'illustre la figure 9.20, au passage de l'onde les extrémités de l'élément de ressort se trouvent respectivement en $x + \xi(x)$ et $x + dx + \xi(x + dx)$. Sa longueur au repos est dx , et son allongement au passage de l'onde $d\xi = \xi(x + dx) - \xi(x)$. En utilisant le résultat établi en 1c), l'énergie potentielle élastique qui lui est associée est : $dE_p = \frac{1}{2}(kL_0/dx)(d\xi)^2 = \frac{1}{2}(kL_0/dx)[(\partial\xi/\partial x)dx]^2 = \frac{1}{2}kL_0(\partial\xi/\partial x)^2 dx$.

d) L'énergie mécanique associée à l'élément de ressort de longueur dx est donc $dE = \frac{1}{2}[\mu(\partial\xi/\partial t)^2 + kL_0(\partial\xi/\partial x)^2]dx$. Dans le cas d'une onde sinusoïdale on obtient : $dE = \{\frac{1}{2}[\mu\omega^2 + kL_0(\omega/c)^2]\xi_0^2 \cos^2(\omega t - \omega x/c)\}dx$. En posant $c^2 = kL_0/\mu$ cette relation se simplifie : $dE = \{(\mu\omega^2)\xi_0^2 \cos^2(\omega t - \omega x/c)\}dx$. En l'intégrant sur une longueur λ de ressort on obtient $E_\lambda = \frac{1}{2}(\mu\omega^2)\xi_0^2\lambda$.

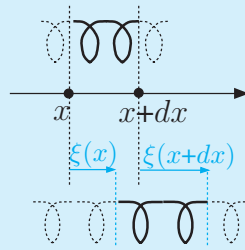


FIGURE 9.20.

Exercice 9.5.

1.a) À l'onde qui provient directement de S on associe l'élongation complexe $ae^{i(\omega t - kx)}$. À celle qui a subi une réflexion en A puis une réflexion en S on associe l'élongation $ar^2e^{i(\omega t - kx)}e^{-2ikL}$. À celle qui a subi deux réflexions en A et deux réflexions en S on associe l'élongation $ar^4e^{i(\omega t - kx)}e^{-4ikL}$, etc. D'où $\bar{y}_+(x, t) = ae^{i(\omega t - kx)}[1 + r^2e^{-2ikL} + r^4e^{-4ikL} + \dots]$. On reconnaît entre crochets la somme des termes d'une progression géométrique. Comme r^n tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini, on obtient : $\bar{y}_+(x, t) = ae^{i(\omega t - kx)} / (1 - r^2e^{-2ikL})$.

b) La première onde qui arrive en M en se propageant dans le sens négatif a subi une réflexion en A . Son amplitude complexe s'écrit $-are^{i(\omega t + kx)}e^{-2ikL}$. À celle qui a subi une réflexion en S et deux réflexions en A on associe l'élongation $-ar^3e^{i(\omega t + kx)}e^{-4ikL}$, et ainsi de suite. Comme à la question précédente on est amené à faire la somme des termes d'une progression géométrique, et l'on obtient : $\bar{y}_-(x, t) = -are^{i(\omega t + kx)}e^{-2ikL} / (1 - r^2e^{-2ikL})$.

c) L'amplitude complexe résultante en M s'écrit :

$$\bar{y}(x, t) = ae^{i\omega t} \frac{e^{-ikx} - re^{ikx}e^{-2ikL}}{1 - r^2e^{-2ikL}} = ae^{i\omega t} \frac{e^{-ikx}e^{ikL} - re^{ikx}e^{-ikL}}{e^{ikL} - r^2e^{-ikL}} \quad (9.54)$$

d) En effectuant le produit $\bar{y}\bar{y}^*$, on obtient :

$$\mathcal{A}^2(x) = a^2 \frac{1 + r^2 - 2r \cos [2k(L - x)]}{1 + r^4 - 2r^2 \cos (2kL)} = a^2 \frac{(1 - r)^2 + 4r \sin^2 [k(L - x)]}{(1 - r^2)^2 + 4r^2 \sin^2 (kL)} \quad (9.55)$$

e) L'amplitude $\mathcal{A}(x)$ est maximale lorsque $\sin^2 [k(L - x)] = 1$, c'est-à-dire lorsque $k(L - x) = (2n + 1)\pi/2$ avec n entier. Cette condition définit la position de ventres : $X_v = L - (2n + 1)\lambda/4$.

En revanche l'amplitude $\mathcal{A}(x)$ sera minimale si $\sin^2 [k(L - x)] = 0$ c'est-à-dire si $k(L - x) = n\pi$. La position des nœuds de vibration est donc définie par $X_n = L - n\lambda/2$. On retrouve donc bien la succession alternée de nœuds et de ventres qui caractérise une onde stationnaire.