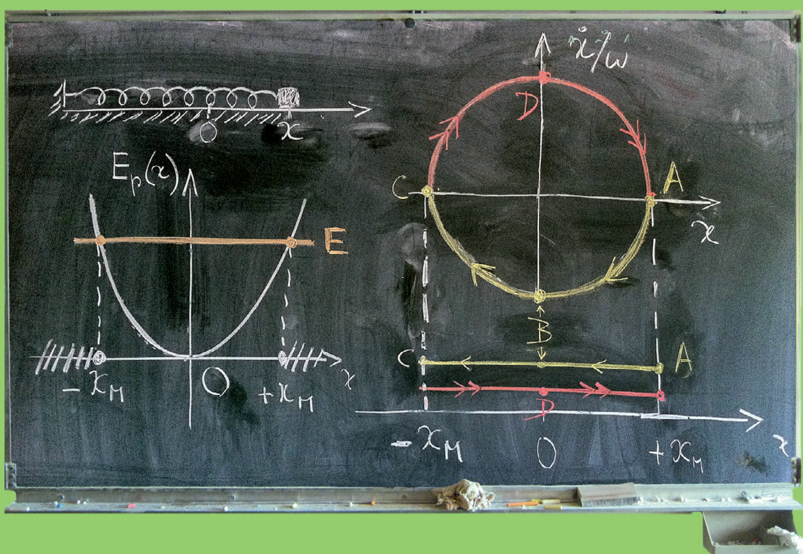
COLLECTION ENSEIGNEMENT SUP //// Physique

L1 L2

Comprendre la mécanique



Jean-Pierre Romagnan

EDP SCIENCES

COMPREHENDRE LA MECANIQUE

Jean-Pierre Romagnan

Collection dirigée par Fabrice Mortessagne

EDP SCIENCES

17, avenue du Hoggar
Parc d'activités de Courtabœuf, BP 112
91944 Les Ulis Cedex A, France

Illustration de couverture : Trajectoire d'un oscillateur linéaire dans l'espace des phases et dans l'espace réel.

Imprimé en France

ISBN : 978-2-7598-0661-4

REMERCIEMENTS

Je remercie Fabrice Mortessagne, Directeur de collection pour l'enseignement de la Physique, de la confiance qu'il m'a témoignée en me proposant d'écrire un ouvrage de Mécanique à l'usage des étudiants de Licence. Ses encouragements et conseils m'ont largement aidé à mener cette tâche à bien. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

Voilà quelques années, nous avons entrepris avec mon collègue Pierre Coullet, de bâtir un cours de Mécanique avec deux objectifs principaux : substituer l'approche géométrique au formalisme différentiel, et faire une large place à la culture scientifique. Pierre a apporté beaucoup d'enthousiasme et d'idées originales à cette entreprise. Il est bien évident que le présent ouvrage, fruit de cette expérience d'enseignement, lui doit beaucoup.

Nicole Ostrowsky, Michel Le Bellac et Jacques Treiner ont bien voulu relire ce manuscrit et me faire part de leurs remarques et suggestions. Je les en remercie chaleureusement.

L'équipe enseignante est constituée par mes collègues Valérie Doya, Frédéric Hébert, Jean-Marc Gilli et de jeunes enseignants, moniteurs ou ATER, Claire Michel, Charles Poli, Guillaume Huillard, Florence Haudin et Amandine Issautier. Je leur suis reconnaissant d'avoir activement participé à la mise au point de ce cours.

Enfin je ne saurais oublier de remercier Bernard Gay Para pour sa disponibilité et l'assistance informatique efficace qu'il m'a apportée.

This page intentionally left blank

TABLE DES MATIÈRES

This page intentionally left blank

AVANT-PROPOS

Si la Mécanique Newtonienne occupe une place importante dans l'enseignement de Physique dispensé aux étudiants inscrits en première année de Licence, ce n'est pas seulement à cause de son statut de discipline fondatrice de la Physique moderne. La Mécanique doit être enseignée dès la première année parce qu'elle offre la possibilité d'illustrer de façon très concrète des concepts fondamentaux (comme l'utilité des lois de conservation) et des phénomènes très généraux que l'on retrouve dans bien d'autres domaines de la Physique (tels que les oscillations, la résonance, les effets non-linéaires). C'est donc à ce titre un enseignement très formateur pour un futur physicien.

Il faut cependant reconnaître que cet enseignement a longtemps été présenté dans le cadre d'un formalisme mathématique que la majorité des nouveaux bacheliers est aujourd'hui loin de maîtriser complètement. Pour s'adapter à son auditoire, l'enseignant se doit donc de proposer une nouvelle présentation, attractive, moins formelle, mais qui permette néanmoins de dégager les idées physiques essentielles. C'est dans cet esprit que cet ouvrage, fruit d'une expérience d'enseignement de plusieurs années, a été écrit.

Chacun des chapitres débute par une approche qualitative qui permet à l'étudiant d'appréhender à travers des expériences et de nombreux exemples, les idées physiques fondamentales qui sous-tendent les phénomènes observés. La construction graphique de trajectoires ou l'utilisation de l'espace des phases pour décrire les oscillations forcées constituent de bons exemples de cette démarche qui utilise largement les constructions géométriques. Une fois ces notions de base acquises, le lecteur trouvera dans la seconde partie de chacun de ces chapitres une description formelle des phénomènes, ainsi que des compléments qui seront utiles aux étudiants souhaitant préparer des concours. C'est en pensant à eux qu'un chapitre sur la Mécanique des solides et un chapitre sur les Ondes mécaniques ont été ajoutés à ce cours de Mécanique du point matériel.

Chaque chapitre se termine par une série d'exercices et problèmes (accompagnées de solutions détaillées) qui permettront à l'étudiant de vérifier qu'il a bien assimilé les notions essentielles. Enfin dans le chapitre Outils Mathématiques, le lecteur trouvera un rappel des notions mathématiques de base indispensables.

1

CINÉMATIQUE

Étudier un mouvement c'est d'abord le décrire puis en identifier les causes. **La cinématique a pour objet de le décrire**, ce qui revient à répondre à deux questions :

– quelle est la trajectoire du mobile ? Pour la définir il faut être capable de déterminer sa position à chaque instant ;

– comment le mobile parcourt-il cette trajectoire ? Son vecteur vitesse et son vecteur accélération nous le diront.

Position, trajectoire, vitesse et accélération sont des notions fondamentales que nous allons définir en montrant comment elles sont intimement liées.

Mais il faut prendre conscience que la description d'un mouvement ne vaut que pour celui qui l'observe. Il faudra donc soigneusement préciser de quel observateur on va traduire le point de vue, ce qui nous conduira à définir la notion de référentiel.

Nous nous limiterons dans ce chapitre à la cinématique du point matériel, c'est-à-dire à l'étude d'un mobile dont la position sera entièrement définie par les coordonnées d'un point.

1.1. Position et trajectoire du mobile

1.1.1. Repère

Le mouvement d'un objet n'existe que défini par rapport à un autre objet qui lui sert de référence. Je marche dans une pièce et suis en mouvement par rapport à la chaise que je viens de quitter, mais pas par rapport au livre que je tiens à la main et qui partage mon mouvement. Si dans le langage courant nous omettons quasi systématiquement de préciser cette référence en nous contentant de dire « je roulais à 80 km/h », c'est qu'implicitement nous définissons notre mouvement par rapport à la Terre. Mais la Terre est en mouvement par rapport au Soleil, qui lui-même se déplace par rapport au centre de notre galaxie, qui elle-même se déplace par rapport aux autres galaxies... Comme l'avait bien compris Galilée, **il n'existe pas de mouvement absolu, pas davantage de repos absolu**.

Le mouvement d'un objet n'existe donc que par rapport à un autre objet qui en est privé, et qui lui sert de référence : lorsque je suis le passager d'une voiture, j'ai le même mouvement qu'elle (je partage son mouvement) et pour moi elle est immobile[(1)]. Je ne suis par conséquent pas le bon objet de référence par rapport auquel on peut définir le mouvement de la voiture. Si je veux étudier le mouvement d'un mobile M, je dois le faire par rapport à un autre objet qui n'est pas animé du même mouvement que M, et c'est cet autre objet que je choisis comme **origine** O. La position du mobile M est alors repérée par le vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ qu'il est commode de définir par ses coordonnées (figure 1.1).

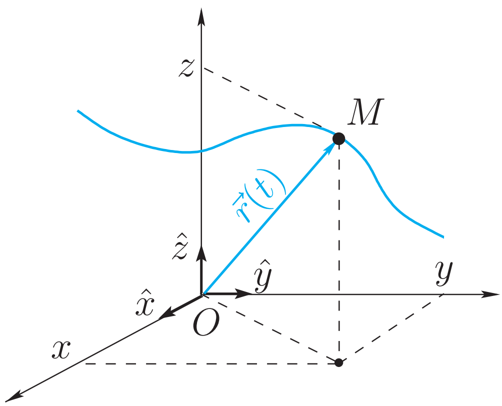


Figure 1.1. Vecteur position dans une base cartésienne. L'ensemble des positions du mobile définit sa trajectoire, en vert.

Pour ce faire il faut définir trois vecteurs unitaires[(2)] et orthogonaux entre eux (une **base orthonormée** disent les mathématiciens). Ce choix n'est pas unique.

[(1)] Passager d'une voiture animée d'un mouvement rectiligne uniforme, si j'ai conscience de son mouvement c'est en regardant à l'extérieur un bâtiment ou un arbre, ou quelque autre objet n'ayant pas le mouvement de la voiture.

[(2)] Les vecteurs unitaires ont un module égal à un. Nous les noterons avec un accent circonflexe : par exemple $\hat{x}$ est le vecteur unitaire associé à l'axe $x'Ox$.

Celui qui vous est le plus familier est l'ensemble de trois vecteurs unitaires **fixes**, notés $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$, qui constituent ce que l'on appelle une base cartésienne[(3)]. Le vecteur position $\overrightarrow{r}$ s'écrit alors :

$$\boxed{\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}} \tag{1.1}$$

en notant x, y, et z ses trois coordonnées algébriques. L'origine O, et la base qui lui est associée, constituent un **repère** qui permet de repérer la position du mobile M. L'ensemble de ces positions constitue la **trajectoire** du mobile (en vert sur la figure 1.1).

1.1.2. Le temps

La seule connaissance de l'ensemble des positions du mobile (sa trajectoire dans l'espace) ne suffit pas pour décrire son mouvement. Pour déterminer comment le mobile décrit sa trajectoire, il faut aussi connaître à quel instant il occupe une position donnée. La mesure du temps est un problème qui s'avérera délicat en relativité, comme vous le découvrirez plus tard[(4)]. Mais **en mécanique classique le temps est absolu et universel**. Sa mesure ne pose pas de difficultés particulières si l'on dispose d'une mesure de temps appelée horloge. Une horloge utilise un phénomène périodique, depuis les oscillations mécaniques du balancier d'une pendule, en passant par les oscillations électriques du cristal de quartz de votre montre, jusqu'aux horloges atomiques dont la précision relative est de l'ordre de 10^{-14}, soit une seconde pour trois millions d'années ! Une horloge permet d'associer un temps t à chaque position du mobile tout au long de son mouvement. On définit ainsi le vecteur position $\vec{r}(t)$ et ses coordonnées $x(t), y(t), z(t)$ dans la base choisie. Dès lors on est en mesure de préciser la façon dont le mobile décrit sa trajectoire, ce qui est essentiel, car **à une même trajectoire peuvent correspondre différents mouvements**. Comme vous le savez sans doute déjà, une trajectoire rectiligne peut en effet être parcourue soit à vitesse constante (mouvement rectiligne uniforme), soit avec une vitesse qui varie linéairement en fonction du temps (mouvement rectiligne uniformément varié), soit avec une vitesse qui dépend périodiquement du temps (mouvement rectiligne oscillant, de l'extrémité d'un ressort par exemple)... soit de bien d'autres façons !

[(3)] Dans la partie « Compléments » nous aborderons le cas des vecteurs de base qui ne sont pas fixes.

[(4)] En relativité, l'intervalle de temps séparant deux événements varie d'un référentiel à un autre, ce que le système GPS prend en compte pour atteindre sa précision actuelle.

1.1.3. Référentiel

Un **observateur**, muni d'un repère et d'une horloge, définit un **référentiel**. Cet observateur aura une perception du mouvement d'un mobile, mais il est clair qu'un second observateur attaché à un autre référentiel percevra différemment ce même mouvement. Par exemple, un observateur immobile par rapport au Soleil voit les planètes décrire des orbites régulières autour du Soleil. Pour la Terre et Vénus ces orbites sont, comme nous le verrons au chapitre 7, quasi circulaires (figure 1.2a), mais décrites avec des vitesses angulaires différentes : lorsque Vénus effectue un tour complet autour du Soleil, la Terre n'effectue que 0,61 tour. Le point de vue d'un observateur terrestre est tout à fait différent (figure 1.2b) : il est immobile dans le référentiel qui lui est attaché, et c'est le Soleil qui tourne autour de lui. Qui plus est, le mouvement des planètes qu'il observe a perdu sa régularité : d'une part parce que la distance Terre-Vénus varie, d'autre part parce que Vénus paraît revenir sur ses pas lorsqu'elle double la Terre, ce que l'on qualifie de mouvement rétrograde. Ce sont les irrégularités de leurs mouvements observés depuis la Terre, qui ont d'ailleurs valu leur nom aux planètes, planète étant synonyme d'astre errant. Il est donc **essentiel de toujours définir le référentiel dans lequel est décrit le mouvement d'un mobile**. Comment concilier les points de vue de deux observateurs liés respectivement à deux référentiels différents, et passer d'un point de vue à l'autre, est un problème important en Physique. Nous l'aborderons dans ce chapitre et nous y reviendrons au chapitre suivant. Nous avons déjà mentionné qu'en mécanique classique le temps est absolu, ce qui signifie que des observateurs liés à des référentiels différents **mesurent tous le même intervalle de temps entre deux événements**[5].

1.1.4. Enregistrement d'une trajectoire

Le suivi de la position d'un mobile peut faire appel à des techniques très différentes pouvant aller du radar au GPS pour les objets macroscopiques (de l'avion au piéton), aux chambres à étincelles pour les particules élémentaires. Toutefois dans l'apprentissage de l'étude du mouvement, en salle de travaux pratiques, on utilise habituellement des techniques moins sophistiquées qui ne repèrent pas la position du mobile à tout instant, mais à des intervalles de temps réguliers notés Δt. Bien évidemment, plus Δt sera petitpar rapport à la durée totale du

[5] Ce qui ne sera plus le cas dans le cadre de la relativité restreinte et de la relativité générale d'Einstein.

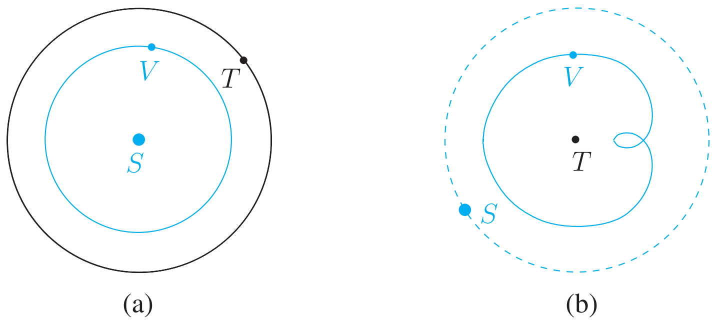


Figure 1.2. (a) Orbites (quasi circulaires) décrites par la planète Vénus et la Terre pour un observateur lié au Soleil. (b) Pour un observateur terrestre, le Soleil décrit une orbite circulaire centrée sur la Terre, mais la trajectoire de Vénus est plus complexe. Notamment Vénus paraît revenir sur ses pas lorsqu'elle double la Terre, c'est le mouvement rétrograde qui a tellement intrigué les observateurs du ciel.

mouvement, plus précisément sera définie sa trajectoire. Selon la technique utilisée pour réaliser ces mesures, Δt sera le plus fréquemment :

- soit la période avec laquelle un palet auto-porteur marque sa position sur une table de mécanique ;
- soit la période des très brefs éclairs lumineux qui éclairent le corps en mouvement dans le champ d'un appareil photographique, on parle alors de mouvement stroboscopé.

Sur le document obtenu on choisira une origine O (point quelconque ou position initiale du mobile), et il suffira de définir deux vecteurs de base (nous sommes dans un plan), le plus souvent orthonormés et fixes. On aura ainsi défini le repère utilisé par l'expérimentateur pour décrire le mouvement. Le référentiel lié à cet expérimentateur, généralement immobile dans la salle d'expérience, est appelé **référentiel du laboratoire**.

1.2. Comment le mobile parcourt la trajectoire

1.2.1. La vitesse

Au cours de son mouvement, le vecteur position du mobile varie. Si l'on repère par $\overrightarrow{OM} = \vec{r}(t)$ et $\overrightarrow{ON} = \vec{r}(t + \Delta t)$ les vecteurs position du mobile aux instants respectifs t et $t + \Delta t$, il apparaît (figure 1.3) que $\vec{r}(t + \Delta t) = \vec{r}(t) + \overrightarrow{\Delta r}$ en notant

Exercice 9.4.

1.a) L'allongement du ressort est défini par $F = k(L - L_0)$, et l'énergie potentielle qu'il emmagasine $E_p = \frac{1}{2}k(L - L_0)^2$.
b) Le ressort est à l'équilibre. La partie du ressort dessinée en noir sur la figure 9.17 est immobile et donc soumise à une force résultante nulle. La partie verte exerce donc la force $-\vec{F}$ sur la partie noire. Et en vertu de la troisième loi de Newton, la partie noire exerce la force $\vec{F}$ sur la partie verte. Le même raisonnement s'applique en tout point du ressort.
c) Lorsque le ressort est au repos les spires sont équidistantes et séparées par une distance a. Si le ressort comporte N spires, $L_0 = Na$. Lorsque le ressort est étiré, ses spires sont toujours équidistantes mais séparées par une distance b, donc $L = Nb$. Par conséquent $(L - L_0)/L_0 = (b - a)/a$. Si la partie du ressort dessinée en vert comporte n spires, $l_0 = na$ et $l = nb$. Donc $(L - L_0)/L_0 = (l - l_0)/l_0$. La force F qui nous l'avons vu s'exerce sur la partie verte du ressort s'écrit $F = (kL_0/l_0)(l - l_0)$. Cette force est bien proportionnelle à l'allongement de cette partie du ressort, mais la raideur à prendre en compte est inversement proportionnelle à la longueur l_0 de ressort considérée. L'énergie potentielle e_p emmagasinée par une partie du ressort est proportionnelle à sa longueur au repos soit :
$e_p = (l_0/L_0)E_p$ soit $e_p = \frac{1}{2}(kL_0/l_0)(l - l_0)^2$.
2.a) Considérons un élément de ressort qui avant le passage de l'onde est situé entre x et $x + dx$. La force résultante (non nulle au passage de l'onde) qui s'exerce sur lui est $dF = kL_0[(\partial\xi/\partial x)_{(x+dx)} - (\partial\xi/\partial x)_x] = kL_0(\partial^2\xi/\partial x^2)dx$. La relation fondamentale de la dynamique appliquée à cet élément de ressort s'écrit : $kL_0(\partial^2\xi/\partial x^2)dx = \mu dx(\partial^2\xi/\partial t^2)dx$. On reconnaît l'équation d'onde et par identification on trouve $c^2 = kL_0/\mu$.
b) L'énergie cinétique d'un élément de ressort de longueur dx s'écrit, par définition, $dE_c = \frac{1}{2}\mu dx(\partial\xi/\partial t)^2$.
c) Comme l'illustre la figure 9.20, au passage de l'onde les extrémités de l'élément de ressort se trouvent respectivement en $x+\xi(x)$ et $x+dx+\xi(x+dx)$. Sa longueur au repos est dx, et son allongement au passage de l'onde $d\xi = \xi(x + dx) - \xi(x)$. En utilisant le résultat établi en 1c), l'énergie potentielle élastique qui lui est associée est : $dE_p = \frac{1}{2}(kL_0/dx)(d\xi)^2 = \frac{1}{2}(kL_0/dx)[(\partial\xi/\partial x)dx]^2 = \frac{1}{2}kL_0(\partial\xi/\partial x)^2dx$.
d) L'énergie mécanique associée à l'élément de ressort de longueur dx est donc $dE = \frac{1}{2}[\mu(\partial\xi/\partial t)^2 + kL_0(\partial\xi/\partial x)^2]dx$. Dans le cas d'une onde sinusoïdale on obtient : $dE = \{\frac{1}{2}[\mu\omega^2 + kL_0(\omega/c)^2]\xi_0^2\cos^2(\omega t - \omega x/c)\}dx$. En posant $c^2 = kL_0/\mu$ cette relation se simplifie : $dE = \{(\mu\omega^2)\xi_0^2\cos^2(\omega t - \omega x/c)\}dx$. En l'intégrant sur une longueur λ de ressort on obtient $E_\lambda = \frac{1}{2}(\mu\omega^2)\xi_0^2\lambda$.

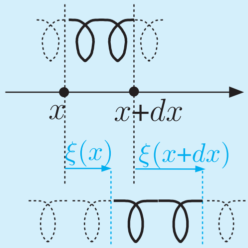


Figure 9.20.

Exercice 9.5.

1.a) À l'onde qui provient directement de S on associe l'élongation complexe $ae^{i(\omega t-kx)}$. À celle qui a subi une réflexion en A puis une réflexion en S on associe l'élongation $ar^2e^{i(\omega t-kx)}e^{-2ikL}$. À celle qui a subi deux réflexions en A et deux réflexions en S on associe l'élongation $ar^4e^{i(\omega t-kx)}e^{-4ikL}$, etc. D'où $\bar{y}_+(x,t) = ae^{i(\omega t-kx)}[1+r^2e^{-2ikL}+r^4e^{-4ikL}+\dots]$. On reconnaît entre crochets la somme des termes d'une progression géométrique. Comme r^n tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini, on obtient : $\bar{y}_+(x,t) = ae^{i(\omega t-kx)}/(1-r^2e^{-2ikL})$.
b) La première onde qui arrive en M en se propageant dans le sens négatif a subi une réflexion en A. Son amplitude complexe s'écrit $-are^{i(\omega t+kx)}e^{-2ikL}$. À celle qui a subi une réflexion en S et deux réflexions en A on associe l'élongation $-ar^3e^{i(\omega t+kx)}e^{-4ikL}$, et ainsi de suite. Comme à la question précédente on est amené à faire la somme des termes d'une progression géométrique, et l'on obtient : $\bar{y}_-(x,t) = -are^{i(\omega t+kx)}e^{-2ikL}/(1-r^2e^{-2ikL})$.
c) L'amplitude complexe résultante en M s'écrit :

$$\bar{y}(x,t) = ae^{i\omega t}\frac{e^{-ikx}-re^{ikx}e^{-2ikL}}{1-r^2e^{-2ikL}} = ae^{i\omega t}\frac{e^{-ikx}e^{ikL}-re^{ikx}e^{-ikL}}{e^{ikL}-r^2e^{-ikL}} \tag{9.54}$$

d) En effectuant le produit $\bar{y}\,\bar{y}^\star$, on obtient :

$$\mathcal{A}^2(x) = a^2\frac{1+r^2-2r\cos[2k(L-x)]}{1+r^4-2r^2\cos(2kL)} = a^2\frac{(1-r)^2+4r\sin^2[k(L-x)]}{(1-r^2)^2+4r^2\sin^2(kL)} \tag{9.55}$$

e) L'amplitude $\mathcal{A}(x)$ est maximale lorsque $\sin^2[k(L-x)] = 1$, c'est-à-dire lorsque $k(L-x) = (2n+1)\pi/2$ avec n entier. Cette condition définit la position de ventres : $X_v = L-(2n+1)\lambda/4$.
En revanche l'amplitude $\mathcal{A}(x)$ sera minimale si $\sin^2[k(L-x)] = 0$ c'est-à-dire si $k(L-x) = n\pi$. La position des nœuds de vibration est donc définie par $X_n = L-n\lambda/2$. On retrouve donc bien la succession alternée de nœuds et de ventres qui caractérise une onde stationnaire.