



C O L L E C T I O N
DIRIGÉE PAR JEAN BORNAREL

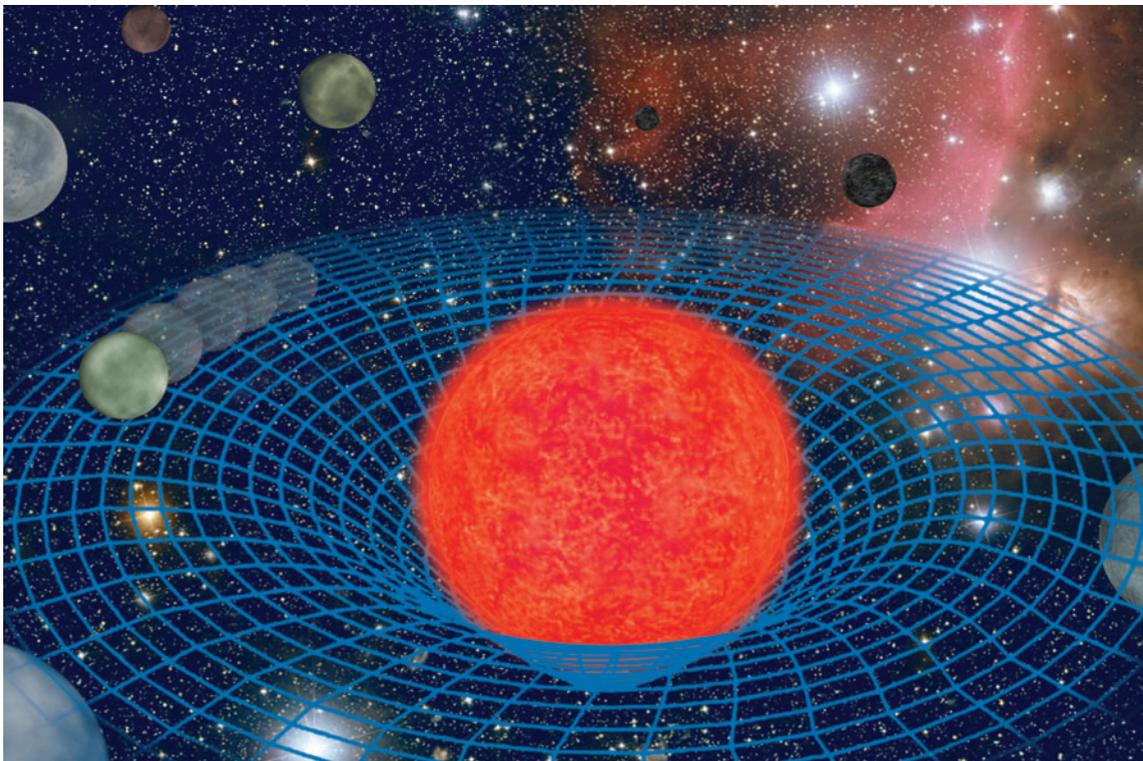
G R E N O B L E

S C I E N C E S

RELATIVITÉ GÉNÉRALE ET ASTROPHYSIQUE

PROBLÈMES ET EXERCICES CORRIGÉS

Denis GIALIS et François-Xavier DÉSSERT



Relativité générale et astrophysique

Problèmes et exercices corrigés

Grenoble Sciences

Grenoble Sciences est un centre de conseil, expertise et labellisation de l'enseignement supérieur français. Il expertise les projets scientifiques des auteurs dans une démarche à plusieurs niveaux (référés anonymes, comité de lecture interactif) qui permet la labellisation des meilleurs projets après leur optimisation. Les ouvrages labellisés dans une collection de Grenoble Sciences ou portant la mention « Sélectionné par Grenoble Sciences » (*Selected by Grenoble Sciences*) correspondent à :

- ▶ des projets clairement définis sans contrainte de mode ou de programme,
- ▶ des qualités scientifiques et pédagogiques certifiées par le mode de sélection (les membres du comité de lecture interactif sont cités au début de l'ouvrage),
- ▶ une qualité de réalisation assurée par le centre technique de Grenoble Sciences.

Directeur scientifique de Grenoble Sciences

Jean Bornarel, Professeur émérite à l'Université Joseph Fourier, Grenoble 1

Pour mieux connaître Grenoble Sciences :

<https://grenoble-sciences.ujf-grenoble.fr>

Pour contacter Grenoble Sciences :

tél : (33) 4 76 51 46 95, e-mail : grenoble.sciences@ujf-grenoble.fr

Livres et pap-ebooks

Grenoble Sciences labellise des livres papier (en langue française et en langue anglaise) mais également des ouvrages utilisant d'autres supports. Dans ce contexte, situons le concept de pap-ebook. Celui-ci se compose de deux éléments :

- ▶ un **livre papier** qui demeure l'objet central avec toutes les qualités que l'on connaît au livre papier,
- ▶ un **site web compagnon** qui propose :
 - des éléments permettant de combler les lacunes du lecteur qui ne posséderait pas les prérequis nécessaires à une utilisation optimale de l'ouvrage,
 - des exercices pour s'entraîner,
 - des compléments pour approfondir un thème, trouver des liens sur internet, etc.

Le livre du pap-ebook est autosuffisant et certains lecteurs n'utiliseront pas le site web compagnon. D'autres l'utiliseront et ce, chacun à sa manière. Un livre qui fait partie d'un pap-ebook porte en première de couverture un logo caractéristique et le lecteur trouvera la liste de nos sites compagnons à l'adresse internet suivante :

<https://grenoble-sciences.ujf-grenoble.fr/pap-ebook>

Grenoble Sciences bénéficie du soutien de la **région Rhône-Alpes** et du **ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche**.

Grenoble Sciences est rattaché à l'**Université Joseph Fourier** de Grenoble.

ISBN 978 2 7598 1749 8

© EDP Sciences 2015

Relativité générale et astrophysique

Problèmes et exercices corrigés

Denis Gialis et François-Xavier Désert



17, avenue du Hoggar
Parc d'Activité de Courtabœuf - BP 112
91944 Les Ulis Cedex A - France

Relativité générale et astrophysique

Problèmes et exercices corrigés

Cet ouvrage, labellisé par Grenoble Sciences, est un des titres du secteur Terre et Univers de la collection Grenoble Sciences d'EDP Sciences, qui regroupe des projets originaux et de qualité. Cette collection est dirigée par Jean Bornarel, Professeur émérite à l'Université Joseph Fourier, Grenoble 1.

Comité de lecture de l'ouvrage :

- ▶ Aurélien Barrau, Professeur à l'Université Joseph Fourier, Grenoble 1, membre de l'Institut Universitaire de France,
- ▶ Thomas Buchert, Professeur à l'Université Claude Bernard, Lyon 1,
- ▶ Damir Buskalic, Professeur à l'Université de Savoie,
- ▶ Johann Collot, Professeur à l'Université Joseph Fourier, Grenoble 1.

Coordination éditoriale et mise en page : Stéphanie Trine ; figures : Sylvie Bordage ; illustration de couverture : Alice Giraud, d'après *Gravity Probe B and Space-Time and Stars and Galaxies* (NASA).

Autres ouvrages labellisés sur des thèmes proches (chez le même éditeur)

Introduction aux variétés différentielles (J. Lafontaine) • Du Soleil à la Terre. Aéronomie et météorologie de l'espace (J. Lilensten & P.-L. Blelly) • Sous les feux du Soleil (J. Bornarel & J. Lilenstein) • La mécanique quantique. Problèmes résolus. Tomes I et II (V.M. Galitski, B.M. Karnakov & V.I. Kogan) • Analyse statistique des données expérimentales (K. Protassov) • Petit traité d'intégration (J.-Y. Briend) • Minimum Competence in Scientific English (S. Blattes, V. Jans & J. Upjohn) • Mécanique. De la formulation lagrangienne au chaos hamiltonien (C. Gignoux & B. Silvestre-Brac) • Problèmes corrigés de mécanique et résumés de cours. De Lagrange à Hamilton (C. Gignoux & B. Silvestre-Brac) • Méthodes numériques appliquées pour le scientifique et l'ingénieur (J.-P. Grivet) • Description de la symétrie. Des groupes de symétrie aux structures fractales (J. Sivardière) • Symétrie et propriétés physiques. Des principes de Curie aux brisures de symétrie (J. Sivardière) • Approximation hilbertienne. Splines, ondelettes, fractales (M. Attéia & J. Gaches) • Introduction à la mécanique statistique (E. Belorizky & W. Gorecki) • Mécanique statistique. Exercices et problèmes corrigés (E. Belorizky & W. Gorecki) • Magnétisme : I Fondements, II Matériaux (sous la direction d'E. du Trémolet de Lacheisserie) • Analyse numérique et équations différentielles (J.-P. Demailly) • Outils mathématiques à l'usage des scientifiques et ingénieurs (E. Belorizky) • Mathématiques pour l'étudiant scientifique. Tomes I et II (P.-J. Haug) • Éléments de Biologie à l'usage d'autres disciplines. De la structure aux fonctions (P. Tracqui & J. Demongeot) • Exercices corrigés d'analyse avec rappels de cours. Tomes I et II (D. Alibert) • Nombres et algèbre (J.-Y. MÉRINDOL)

et d'autres titres sur le site internet
<https://grenoble-sciences.ujf-grenoble.fr>

Avant-propos

La théorie de la relativité générale constitue, avec la théorie quantique, l'une des plus grandes avancées scientifiques du XX^e siècle. Le cadre mathématique sur lequel elle s'appuie est celui des variétés pseudo-riemanniennes, et l'une des découvertes majeures d'Albert Einstein est d'avoir compris le lien entre la gravitation, la matière et la géométrie de notre espace physique rebaptisé *espace-temps*.

Tout étudiant en physique connaît les efforts et la persévérance dont il faut faire preuve pour comprendre les bases de la relativité générale. Les enseignants en Master, dans les écoles doctorales ou dans les Grandes Ecoles, savent également les difficultés que l'on rencontre lorsqu'il s'agit d'exposer une théorie si fondamentale. Pourtant, les applications pratiques et les conséquences théoriques dans l'astrophysique moderne sont innombrables et incontournables.

Cet ouvrage de problèmes et d'exercices, de difficulté variable, a été construit dans l'unique but d'aider tout étudiant, chercheur ou curieux souhaitant assimiler les bases de la relativité générale via la pratique du calcul, tensoriel notamment, et du raisonnement mathématique et physique. De nombreuses démonstrations de cours, premiers tremplins vers des calculs plus complexes, sont ainsi intégrées dans des problèmes plus généraux et souvent très classiques. Chaque problème ou exercice fait l'objet d'une correction suffisamment détaillée pour permettre un travail parfaitement autonome de l'étudiant du Master au Doctorat.

Les deux premiers chapitres sont conçus pour amener le lecteur à se familiariser avec les notions mathématiques essentielles de géométrie différentielle et de calcul tensoriel. De nombreux points de vocabulaire sont introduits, et l'espace-temps est présenté et étudié dans le cadre plus général des variétés pseudo-riemanniennes.

Le troisième chapitre met l'accent sur le problème récurrent de la mesure du temps, des distances et des énergies par un observateur plongé dans un espace-temps courbé par un objet massif, ou bien artificiellement accéléré au cours d'un voyage spatial. Le problème pratique des systèmes de géolocalisation est abordé, tout comme celui de la gravitation en champ faible faisant le lien avec la gravitation de Newton.

Les chapitres quatre et cinq abordent l'étude de l'espace-temps au voisinage des deux principaux types de trous noirs observés dans l'Univers que sont les trous noirs à symétrie sphérique, sans rotation ni charge électrique, appelés trous noirs de Schwarzschild, et les trous noirs en rotation mais dénués de charge électrique que l'on nomme trous noirs de Kerr. Le formalisme 3+1, utilisé de nos jours dans de nombreuses publications, est présenté au lecteur.

Le chapitre six propose une introduction à l'étude des ondes gravitationnelles, depuis la linéarisation de l'équation d'Einstein jusqu'aux conséquences pour la perte d'énergie d'un système binaire d'objets compacts.

Dans le chapitre sept, on introduit le tenseur énergie-impulsion et le tenseur champ électromagnétique. Divers exemples, comme les célèbres équations de Tolman-Oppenheimer-Volkoff, permettent de découvrir leur utilisation dans le cadre de l'hydrodynamique et/ou de l'électrodynamique relativiste. Le formalisme 3+1 est de nouveau abordé et nous conduit à la projection des équations d'Einstein et des équations de Maxwell. Enfin, une construction du champ électromagnétique dans la magnétosphère d'un trou noir de Kerr est destinée à préparer le lecteur à l'étude du processus de Blandford-Znajek.

Dans le chapitre huit, c'est une présentation du rôle de la relativité générale dans la cosmologie moderne qui est proposée au travers d'une série d'exercices et de problèmes dont certains sont issus du cours donné par François-Xavier Désert en Master 2, à l'Université Joseph Fourier de Grenoble.

Les notations utilisées, les définitions et les relations fondamentales de la relativité générale sont regroupées dans un formulaire placé en fin d'ouvrage permettant à l'étudiant d'avoir un aperçu synthétique des bases de la théorie.

D. Gialis
14 juin 2013

Avvertissement – Au début de chaque problème, des lettres indiquent le niveau de difficulté : [M] signifie accessible dès la première année de Master, [MD] signifie accessible aux étudiants en fin de Master et plus, et enfin, [D] est réservé aux problèmes les plus difficiles de niveau Doctorat.

Notations – La sommation associée aux indices est faite selon la *convention d'Einstein*. En revanche, le type de lettres (latines ou grecques) pour l'écriture des indices et la correspondance au type de coordonnées (spatiales ou temporelles) varient selon les problèmes.

Table des matières

Chapitre 1 – Introduction à la géométrie différentielle	1
1.1. Courbes et vecteurs tangents	1
1.2. Géodésiques sur la sphère S_2	2
1.3. Métrique induite	5
1.4. Pseudo-sphère en dimension 3	6
1.5. Dualité métrique	8
1.6. Quadri-vecteurs de genre lumière, temps et espace	10
1.7. Dérivée de Lie	12
1.8. Changement de coordonnées dans l'espace-temps	16
1.9. Changement de coordonnées et élément de volume	17
1.10. Equations des géodésiques et principe variationnel	19
1.11. Unicité de la connexion de Levi-Civita	23
1.12. Courbes auto-parallèles	28
1.13. Géodésiques nulles	29
1.14. Transport parallèle	31
1.15. Produit extérieur et formes différentielles	33
Chapitre 2 – Géométrie et calcul tensoriel	39
2.1. Equation des géodésiques et vecteur tangent	39
2.2. Critère de tensorialité	42
2.3. Dérivée covariante seconde	43
2.4. Tenseur de Levi-Civita	44
2.5. Caractérisation de la courbure	46
2.6. Courbure de la sphère S_3	48
2.7. Courbure et élément de surface	49
2.8. Relations tensorielles	53

2.9. Propriétés du tenseur de courbure	55
2.10. Platitude conforme	58
2.11. Vecteurs de Killing	59
2.12. Propriétés du tenseur de Weyl	62
2.13. Déviation géodésique	65
2.14. Tétrades et tenseur de Riemann	67
2.15. Dérivée de Fermi-Walker	71
2.16. Hypersurfaces de l'espace-temps	74
2.17. Equations de Gauss et Codazzi	80
2.18. Comparaison de courbures	84
Chapitre 3 – Espace-temps et mesure	87
3.1. Mesure des distances et des intervalles de temps	87
3.2. Energie dans un champ gravitationnel constant	90
3.3. Référentiel d'un observateur en rotation	92
3.4. De l'inconvénient des voyages spatiaux	94
3.5. Décalage vers le rouge gravitationnel	98
3.6. Gravitation en champs faibles	99
3.7. Champ gravitationnel terrestre et géolocalisation	102
3.8. Période de rotation d'un pulsar	105
Chapitre 4 – Espace-temps de Schwarzschild	109
4.1. Espace-temps statique à symétrie sphérique	109
4.2. Détermination de la métrique de Schwarzschild	111
4.3. Horizon des événements	116
4.4. Energie et moment cinétique orbital	117
4.5. Courbure de l'espace-temps de Schwarzschild et effet de marée	119
4.6. Géodésiques dans l'espace-temps de Schwarzschild	123
4.7. Mirages gravitationnels et anneaux d'Einstein	134
4.8. Avance du périhélie de Mercure	137
4.9. Vitesse et énergie dans l'espace-temps de Schwarzschild	140
4.10. Collapse gravitationnel d'une étoile massive	141
4.11. Trous noirs, trous blancs et changement de coordonnées	145
4.12. Métrique de Schwarzschild en coordonnées isotropes	150

Chapitre 5 – Espace-temps de Kerr	153
5.1. Singularité et limites de la métrique de Kerr	153
5.2. Géodésiques nulles et coordonnées de Kerr-Schild	157
5.3. Formalisme 3+1 et métrique axisymétrique	162
5.4. Surface limite de stationnarité	169
5.5. Horizon et ergorégion d'un trou noir de Kerr	171
5.6. Processus de Penrose	174
5.7. Mesures d'un FIDO autour d'un trou noir de Kerr	176
5.8. Géodésiques dans l'espace-temps de Kerr	183
5.9. Orbite circulaire stable autour d'un trou noir de Kerr	191
5.10. Extraction d'énergie d'un trou noir de Kerr	194
5.11. Précession gyroscopique	198
5.12. Collision de particules près d'un trou noir de Kerr	205
Chapitre 6 – Ondes gravitationnelles	211
6.1. Equation d'Einstein linéarisée	211
6.2. Ondes gravitationnelles et jauge TT	216
6.3. Onde gravitationnelle et particules libres	220
6.4. Formule du quadripôle	224
6.5. De la source stationnaire à la limite newtonienne	227
6.6. Emission et perte d'énergie d'un système binaire	231
Chapitre 7 – Champs et matière	239
7.1. Tenseur énergie-impulsion et flux d'impulsion	239
7.2. Champs faibles et équation de Poisson	241
7.3. Dualité de Hodge et équations de Maxwell	243
7.4. Force de Lorentz et tenseur de Maxwell	246
7.5. Propriétés du tenseur énergie-impulsion	250
7.6. Rayonnement et luminosité d'une étoile compacte	255
7.7. Nuage de poussière	260
7.8. Transformation de jauge	261
7.9. Equations de Tolman-Oppenheimer-Volkoff	263
7.10. Equations de Arnowitt, Deser et Misner	268
7.11. Formalisme 3+1 et champ électromagnétique	275
7.12. Magnétosphère d'un trou noir de Kerr	283

Chapitre 8 – Cosmologie	291
8.1. Métrique de Friedmann-Robertson-Walker	291
8.2. Géométrie d’hypersurfaces spatialement isotropes en tout point	295
8.3. Courbure de l’Univers et géodésiques	298
8.4. Dynamique de l’Univers et équations de FRW-Lemaître	302
8.5. Paramètre de décélération et densités réduites	310
8.6. Distance angulaire et distance de luminosité	314
8.7. Horizon cosmique et taille de l’Univers	316
8.8. Age de l’Univers et paramètre d’échelle	317
8.9. Voyage intergalactique	319
Formulaire abrégé de relativité générale	323
Quelques constantes astrophysiques	343
Bibliographie	344
Index	349

Introduction à la géométrie différentielle

[M] ■ EXERCICE 1.1

Les notions de base naturelle et de vecteur tangent sont illustrées dans cet exercice de niveau élémentaire.

Courbes et vecteurs tangents – Dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 , muni de coordonnées cartésiennes $\{x, y, z\}$, on considère un point P de coordonnées $(0, 1, 0)$ par lequel passent trois courbes définies par

$$C_1(\lambda) = (\lambda, 1, \lambda),$$

$$C_2(\xi) = (\sin \xi, \cos \xi, \xi),$$

$$C_3(\rho) = (\sinh \rho, \cosh \rho, \rho + \rho^3).$$

1 – Calculer au point P , $df/d\lambda$, $df/d\xi$, et $df/d\rho$, pour la fonction f telle que $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$.

2 – Déterminer les composantes des vecteurs tangents $d/d\lambda$, $d/d\xi$, et $d/d\rho$, à chacune des courbes, au point P et dans la base $\{\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z\}$. Que dire alors des trois courbes ?

► SOLUTION

1 – En dérivant la fonction f par rapport à un paramètre $\tau \in \{\lambda, \xi, \rho\}$, on obtient

$$\frac{df}{d\tau} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \tau} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \tau},$$

$$\begin{array}{l}
\text{avec} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z, \\
\text{et} \quad \frac{\partial x}{\partial \lambda} = 1, \quad \frac{\partial x}{\partial \xi} = \cos \xi, \quad \frac{\partial x}{\partial \rho} = \cosh \rho, \\
\frac{\partial y}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = -\sin \xi, \quad \frac{\partial y}{\partial \rho} = \sinh \rho, \\
\frac{\partial z}{\partial \lambda} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial \xi} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial \rho} = 1 + 3\rho^2.
\end{array}$$

Au point P de coordonnées $(x = 0, y = 1, z = 0)$, c'est-à-dire $(\lambda = 0, \xi = 0, \rho = 0)$, on déduit

$$\left(\frac{df}{d\lambda}\right)_P = 0, \quad \left(\frac{df}{d\xi}\right)_P = 0, \quad \left(\frac{df}{d\rho}\right)_P = 0.$$

2 – On peut écrire

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\lambda} &= \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial z}, \\
\frac{d}{d\xi} &= \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial z}, \\
\frac{d}{d\rho} &= \frac{\partial x}{\partial \rho} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \rho} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \rho} \frac{\partial}{\partial z},
\end{aligned}$$

ce qui, d'après la question précédente, donne au point P de coordonnées $(x = 0, y = 1, z = 0)$,

$$\frac{d}{d\lambda} = (1, 0, 1), \quad \frac{d}{d\xi} = (1, 0, 1), \quad \frac{d}{d\rho} = (1, 0, 1),$$

dans la base $\{\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z\}$. Les trois courbes sont donc tangentes en P .

[M] ■ EXERCICE 1.2

Le but est ici de définir une géodésique sur une surface de l'espace euclidien et d'en déterminer explicitement les équations.

Géodésiques sur la sphère S_2 – On se place dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 . Une *géodésique* d'une surface $S \subset \mathbb{R}^3$ est une courbe γ , de classe \mathcal{C}^∞ sur $I \subset \mathbb{R}$, tracée sur S telle que, pour tout $t \in I$, et tout vecteur \vec{T} du plan tangent à γ en t , $\ddot{\gamma}(t) \perp \vec{T}$. On admet que cette courbe est un arc paramétré régulier, c'est-à-dire tel que, $\forall t \in I$, $\dot{\gamma}(t) \neq 0$.

Remarque : on notera que $\gamma(t)$ et ses dérivées $\dot{\gamma}(t)$, $\ddot{\gamma}(t)$ sont des vecteurs.

1 – Soit $\{u, v\}$ un système de coordonnées de S , et σ une courbe régulière de S de classe C^∞ sur $I \subset \mathbb{R}$. Montrer que, $\forall t \in I$,

$$\|\dot{\sigma}(t)\|^2 = E(u(t), v(t)) (\dot{u}(t))^2 + 2F(u(t), v(t)) \dot{u}(t) \dot{v}(t) + G(u(t), v(t)) (\dot{v}(t))^2,$$

avec E , F et G trois applications que l'on exprimera sous la forme d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

2 – On admet que la fonction $\mathcal{L} : (t, u, v, \dot{u}, \dot{v}) \mapsto \|\dot{\sigma}(t)\|^2$ vérifie les équations d'Euler-Lagrange. Démontrer que σ est une géodésique.

3 – Montrer que toute géodésique est parcourue à vitesse constante.

4 – On considère la sphère $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^3, \|x\|^2 = 1\}$. Soient $I \subset \mathbb{R}$ et $\gamma : I \rightarrow S_2$ une géodésique de S_2 . Montrer qu'il existe une fonction $\lambda : t \mapsto \langle \ddot{\gamma}(t), \gamma(t) \rangle$, telle que $\ddot{\gamma}(t) = \lambda(t) \gamma(t)$. En déduire les équations des géodésiques sur S_2 .

► SOLUTION

1 – On peut écrire, par définition, $\sigma(t) = M(u(t), v(t))$, avec M un point de σ , ce qui donne

$$\dot{\sigma}(t) = \frac{\partial M}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial M}{\partial v} \dot{v},$$

avec $\{\partial M/\partial u, \partial M/\partial v\}$ la base naturelle associée au système de coordonnées $\{u, v\}$ sur S . La norme au carré s'écrit donc

$$\|\dot{\sigma}(t)\|^2 = E(u, v) \dot{u}^2 + 2F(u, v) \dot{u} \dot{v} + G(u, v) \dot{v}^2,$$

avec

$$E(u, v) = \left\langle \frac{\partial M}{\partial u}, \frac{\partial M}{\partial u} \right\rangle, \quad F(u, v) = \left\langle \frac{\partial M}{\partial u}, \frac{\partial M}{\partial v} \right\rangle, \quad G(u, v) = \left\langle \frac{\partial M}{\partial v}, \frac{\partial M}{\partial v} \right\rangle.$$

2 – Les équations d'Euler-Lagrange s'écrivent

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{v}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} &= 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (E(u, v) \dot{u} + F(u, v) \dot{v}) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial E}{\partial u} \dot{u}^2 + 2 \frac{\partial F}{\partial u} \dot{u} \dot{v} + \frac{\partial G}{\partial u} \dot{v}^2 \right), \\ \frac{d}{dt} (F(u, v) \dot{u} + G(u, v) \dot{v}) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial E}{\partial v} \dot{u}^2 + 2 \frac{\partial F}{\partial v} \dot{u} \dot{v} + \frac{\partial G}{\partial v} \dot{v}^2 \right). \end{aligned}$$

De plus,

$$E(u, v) \dot{u} + F(u, v) \dot{v} = \left\langle \dot{\sigma}, \frac{\partial M}{\partial u} \right\rangle,$$

$$F(u, v) \dot{u} + G(u, v) \dot{v} = \left\langle \dot{\sigma}, \frac{\partial M}{\partial v} \right\rangle,$$

ce qui implique

$$\frac{d}{dt} (E(u, v) \dot{u} + F(u, v) \dot{v}) = \left\langle \ddot{\sigma}, \frac{\partial M}{\partial u} \right\rangle + \left\langle \dot{\sigma}, \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial M}{\partial u} \right) \right\rangle,$$

$$\frac{d}{dt} (F(u, v) \dot{u} + G(u, v) \dot{v}) = \left\langle \ddot{\sigma}, \frac{\partial M}{\partial v} \right\rangle + \left\langle \dot{\sigma}, \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial M}{\partial v} \right) \right\rangle.$$

Enfin,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial E}{\partial u} \dot{u}^2 + 2 \frac{\partial F}{\partial u} \dot{u} \dot{v} + \frac{\partial G}{\partial u} \dot{v}^2 \right) &= \left\langle \frac{\partial^2 M}{\partial u^2} \dot{u} + \frac{\partial^2 M}{\partial u \partial v} \dot{v}, \dot{\sigma} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial M}{\partial u} \right), \dot{\sigma} \right\rangle, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial E}{\partial v} \dot{u}^2 + 2 \frac{\partial F}{\partial v} \dot{u} \dot{v} + \frac{\partial G}{\partial v} \dot{v}^2 \right) &= \left\langle \frac{\partial^2 M}{\partial u \partial v} \dot{u} + \frac{\partial^2 M}{\partial v^2} \dot{v}, \dot{\sigma} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial M}{\partial v} \right), \dot{\sigma} \right\rangle. \end{aligned}$$

Les équations d'Euler-Lagrange donnent donc

$$\left\langle \ddot{\sigma}, \frac{\partial M}{\partial u} \right\rangle = 0,$$

$$\left\langle \ddot{\sigma}, \frac{\partial M}{\partial v} \right\rangle = 0,$$

ce qui signifie que $\ddot{\sigma}$ appartient au plan tangent à S en t . Autrement dit, σ est une géodésique.

3 – Soit γ une géodésique. On a simplement

$$\frac{d}{dt} (\|\dot{\gamma}(t)\|^2) = \frac{d}{dt} (\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle) = 2 \langle \ddot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = 0,$$

puisque $\ddot{\gamma} \perp \dot{\gamma}$. La vitesse est donc constante le long d'une géodésique.

4 – La courbe γ étant une géodésique, le vecteur \overrightarrow{OM} , égal à $\gamma(t)$, est tel que $\|\overrightarrow{OM}\| = 1$, ce qui s'écrit aussi $\langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle = 1$. En dérivant deux fois, on obtient

$$\langle \ddot{\gamma}(t), \gamma(t) \rangle + \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle = 0.$$

Comme $\langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle$ est constant, on peut définir une fonction λ constante telle que $\lambda(t) = -\langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle = -\omega^2$. Cela montre aussi que $\overrightarrow{OM} \perp \dot{\gamma}$. On dispose donc, pour γ , de l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{\gamma} + \omega^2 \gamma = 0.$$

Les géodésiques sur la sphère S_2 sont donc telles que

$$\gamma(t) = \gamma(0) \cos(\omega t) + \frac{\dot{\gamma}(0)}{\omega} \sin(\omega t).$$

Autrement dit, une géodésique est un grand cercle défini comme l'intersection de S_2 avec le plan dont une base est $\{\overrightarrow{OM}_0, \dot{\gamma}(0)\}$, avec $\overrightarrow{OM}_0 = \gamma(0)$.

[M] ■ EXERCICE 1.3

Cet exercice illustre simplement, par l'étude d'un exemple, la notion de métrique induite, si importante en relativité générale.

Métrique induite – Dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 , muni d'un repère $\{O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ cartésien, on considère une courbe $\mathcal{C} : s \mapsto (x(s), 0, z(s))$, paramétrée par son abscisse curviligne s .

1 – Paramétrer la surface de révolution engendrée par la rotation autour de l'axe (Oz) .

2 – Calculer la métrique induite par la métrique euclidienne dans cette paramétrisation.

► SOLUTION

1 – Pour obtenir une paramétrisation de la surface de révolution, il suffit d'exprimer les coordonnées d'un vecteur quelconque de cette surface, qui sont obtenues après rotation d'un vecteur de la courbe. Cette paramétrisation s'écrira ainsi

$$\vec{\Sigma} : (s, p) \mapsto \begin{pmatrix} \cos(p) & -\sin(p) & 0 \\ \sin(p) & \cos(p) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(s) \\ 0 \\ z(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(s) \cos(p) \\ x(s) \sin(p) \\ z(s) \end{pmatrix}.$$

2 – Un vecteur déplacement élémentaire sur cette surface s'écrit

$$d\vec{\Sigma} = \frac{\partial \vec{\Sigma}}{\partial s} ds + \frac{\partial \vec{\Sigma}}{\partial p} dp,$$

avec

$$\frac{\partial \vec{\Sigma}}{\partial s} = \begin{pmatrix} \dot{x}(s) \cos(p) \\ \dot{x}(s) \sin(p) \\ \dot{z}(s) \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial \vec{\Sigma}}{\partial p} = \begin{pmatrix} -x(s) \sin(p) \\ x(s) \cos(p) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La métrique induite est donc donnée par

$$d\sigma^2 = \|\mathrm{d}\vec{\Sigma}\|^2 = (\dot{x}(s)^2 + \dot{z}(s)^2) ds^2 + x(s)^2 dp^2,$$

en notant $\dot{x}(s) = dx/ds$, et $\dot{z}(s) = dz/ds$. La variable s étant l'abscisse curviligne sur \mathcal{C} , $ds^2 = dx^2 + dz^2$, c'est-à-dire, $\dot{x}(s)^2 + \dot{z}(s)^2 = 1$. Finalement, la métrique induite est simplement : $d\sigma^2 = ds^2 + x(s)^2 dp^2$.

[M] ■ EXERCICE 1.4

Le calcul de l'aire d'une pseudo-sphère dans un espace muni d'une métrique non-euclidienne est un exercice classique.

Pseudo-sphère en dimension 3 – Soit l'espace \mathbb{R}^3 , muni de la métrique \mathbf{g} telle que $\mathbf{g}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}s) = ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2$. On définit la *pseudo-sphère* comme étant la surface $\Psi S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 - z^2 = -1\}$. On appelle *projection stéréographique*, l'application qui, à un point (x, y) du disque, \mathcal{D} , de rayon 2 et de centre $N = (0, 0, 1)$, tangent à la pseudo-sphère en N , associe le point d'intersection de la droite passant par les points $S = (0, 0, -1)$ et $A = (x, y, 1)$ avec la pseudo-sphère (voir figure 1.1).

1 – Exprimer, dans le système de coordonnées $\{x, y\}$, la métrique induite par la forme quadratique \mathbf{g} sur la pseudo-sphère.

2 – Quelle est l'aire de la pseudo-sphère ?

► SOLUTION

1 – Soit $M = (x_M, y_M, z_M)$ un point de la pseudo-sphère. On peut y associer le point A du disque en écrivant $\overrightarrow{SM} = t \overrightarrow{SA}$, avec $t \geq 1$. On déduit facilement

$$\{x_M = tx, \quad y_M = ty, \quad z_M = 2t - 1\}.$$

Comme $x_M^2 + y_M^2 - z_M^2 = -1$, on a alors $t(x^2 + y^2 - 4) = -4$, et la paramétrisation suivante pour la pseudo-sphère,

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{4x}{4 - x^2 - y^2}, \\ y_M &= \frac{4y}{4 - x^2 - y^2}, \\ z_M &= \frac{4 + x^2 + y^2}{4 - x^2 - y^2}. \end{aligned}$$

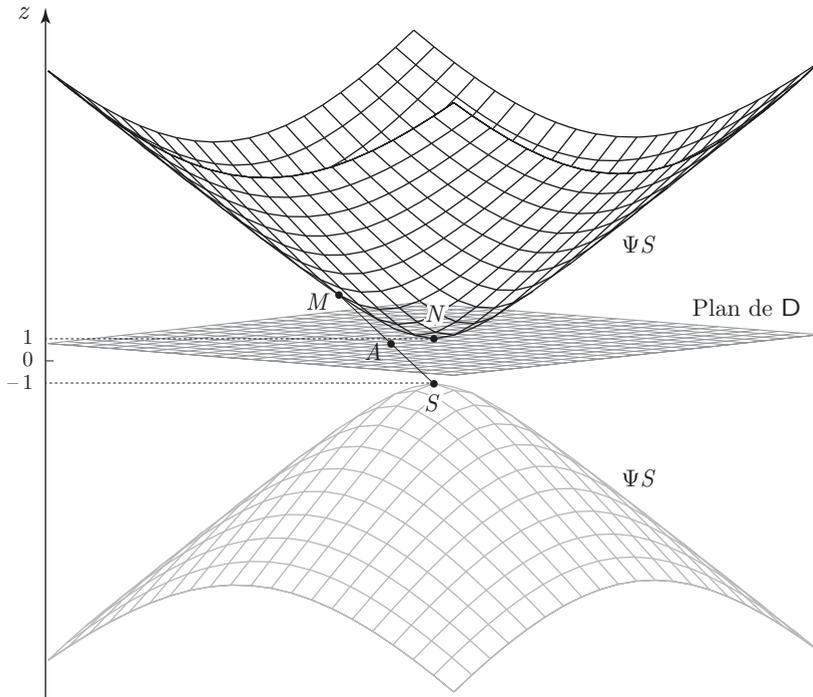


Figure 1.1 – Projection stéréographique de la pseudo-sphère.

De plus,

$$\begin{aligned} dx_M &= x dt + t dx, \\ dy_M &= y dt + t dy, \\ dz_M &= 2 dt. \end{aligned}$$

On peut donc écrire, en réarrangeant les termes,

$$dx_M^2 + dy_M^2 - dz_M^2 = (x^2 + y^2 - 4) dt^2 + 2t dt (x dx + y dy) + t^2 (dx^2 + dy^2).$$

De l'égalité $t(x^2 + y^2 - 4) = -4$, on a la relation $(x^2 + y^2 - 4) dt + 2t(x dx + y dy) = 0$, ce qui implique

$$dx_M^2 + dy_M^2 - dz_M^2 = t^2 (dx^2 + dy^2).$$

La métrique induite s'écrit donc

$$d\sigma^2 = dx_M^2 + dy_M^2 - dz_M^2 = \frac{16}{(4 - x^2 - y^2)^2} (dx^2 + dy^2).$$

2 – D'après la métrique induite, l'élément d'aire s'écrit

$$dS = \sqrt{|g|} dx dy = \frac{16}{(4 - x^2 - y^2)^2} dx dy.$$

L'aire de la pseudo-sphère est donc égale à

$$S = \int_{\mathcal{D}} \frac{16}{(4 - x^2 - y^2)^2} dx dy = \int_{r=0}^2 \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{r dr d\theta}{(4 - r^2)^2} = +\infty.$$

[M] ■ EXERCICE 1.5

La dualité métrique est une notion fondamentale pour comprendre les bases du calcul tensoriel et de la géométrie pseudo-riemannienne. Une interprétation géométrique vient illustrer ici sa définition et ses propriétés.

Dualité métrique – On se place dans une variété pseudo-riemannienne \mathcal{V} munie d'une métrique \mathbf{g} . En tout point M de \mathcal{V} , et pour tout vecteur \mathbf{u} de l'espace vectoriel tangent $\mathbf{T}_M(\mathcal{V})$, on peut définir une unique forme linéaire \mathbf{u}^* de $\mathbf{T}_M^*(\mathcal{V})$ telle que

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^* : \mathbf{T}_M(\mathcal{V}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{v} &\mapsto \mathbf{u}^*(\mathbf{v}) = \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \end{aligned}$$

On dit que \mathbf{u}^* est associée à \mathbf{u} par dualité métrique. Dans une base $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_\mu\}$, les *coordonnées covariantes* u_μ d'un vecteur \mathbf{u} sont définies comme les coordonnées de la forme \mathbf{u}^* dans la base duale $\mathcal{B}^* = \{\mathbf{e}^\mu\}$ de \mathcal{B} .

De la même façon, les *coordonnées contravariantes* \tilde{u}^μ d'une forme linéaire \mathbf{u}^* sont définies comme les coordonnées dans \mathcal{B} de l'unique vecteur $\tilde{\mathbf{u}}$ tel que, $\forall \mathbf{v}^* \in \mathbf{T}_M^*(\mathcal{V})$, $\mathbf{v}^*(\tilde{\mathbf{u}}) = \mathbf{g}^*(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*)$. On dit alors que le vecteur $\tilde{\mathbf{u}}$ est associé à \mathbf{u}^* par dualité métrique.

1 – Exprimer les coordonnées covariantes d'un vecteur \mathbf{u} en fonction de ses coordonnées contravariantes dans une base $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_\mu\}$, et de $g_{\mu\nu} = \mathbf{g}(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu)$. En déduire les coordonnées covariantes d'un vecteur de la base \mathcal{B} .

2 – Exprimer les coordonnées contravariantes d'une forme linéaire \mathbf{u}^* en fonction de ses coordonnées covariantes dans la base $\mathcal{B}^* = \{\mathbf{e}^\mu\}$, et de $g^{\mu\nu} = \mathbf{g}^*(\mathbf{e}^\mu, \mathbf{e}^\nu)$, avec \mathbf{g}^* le tenseur dual de \mathbf{g} . En déduire les coordonnées contravariantes d'un vecteur de la base \mathcal{B}^* .

3 – Les formes linéaires associées aux vecteurs de la base \mathcal{B} forment-elle une base de $\mathbf{T}_M^*(\mathcal{V})$?

4 – Montrer que le produit scalaire entre un vecteur \mathbf{e}_λ de la base \mathcal{B} et le vecteur $\tilde{\mathbf{u}}$ associé à la forme linéaire \mathbf{e}^λ de la base \mathcal{B}^* est égal au produit scalaire entre la forme linéaire \mathbf{e}^λ et la forme linéaire \mathbf{u}^* associée au vecteur \mathbf{e}_λ .

5 – Donner une interprétation géométrique des coordonnées covariantes et contravariantes d'un vecteur \mathbf{u} en choisissant une base normalisée mais non orthogonale pour \mathcal{B} . Que se passe-t-il lorsque la base est orthonormée ?

► **SOLUTION**

1 – Si, dans la base \mathcal{B} , $\mathbf{u} = u^\mu \mathbf{e}_\mu$, la définition de \mathbf{u}^* donne

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{e}_\nu) = \mathbf{g}(u^\mu \mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu) = g_{\mu\nu} u^\mu,$$

et, en posant $\mathbf{u}^* = u_\mu \mathbf{e}^\mu$,

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{e}_\nu) = u_\mu \mathbf{e}^\mu(\mathbf{e}_\nu) = u_\mu \delta_\nu^\mu = u_\nu,$$

c'est-à-dire, $u_\nu = g_{\mu\nu} u^\mu$. On en déduit la μ -ième coordonnée covariante, notée $(\mathbf{e}_\lambda)_\mu$, d'un vecteur \mathbf{e}_λ de la base \mathcal{B} qui s'écrit donc $(\mathbf{e}_\lambda)_\mu = g_{\lambda\mu}$.

2 – On pose $\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{u}^\mu \mathbf{e}_\mu$ dans la base \mathcal{B} , et $\mathbf{u}^* = u_\mu \mathbf{e}^\mu$ dans la base \mathcal{B}^* . On a donc d'une part, $\mathbf{e}^\nu(\tilde{\mathbf{u}}) = \tilde{u}^\mu \mathbf{e}^\nu(\mathbf{e}_\mu) = \tilde{u}^\nu$, et, d'autre part, par définition, $\mathbf{e}^\nu(\tilde{\mathbf{u}}) = \mathbf{g}^*(\mathbf{u}^*, \mathbf{e}^\nu) = g^{\mu\nu} u_\mu$. Ainsi, $\tilde{u}^\nu = g^{\mu\nu} u_\mu$. On en déduit la μ -ième coordonnée contravariante, notée $(\mathbf{e}^\lambda)^\mu$, d'une forme linéaire \mathbf{e}^λ de la base \mathcal{B}^* qui s'écrit donc $(\mathbf{e}^\lambda)^\mu = g^{\lambda\mu}$.

Remarque : si \mathbf{u}^* est associée à \mathbf{u} par dualité métrique, alors $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}$.

3 – Puisque les formes linéaires $\{\omega_\lambda\}$ associées aux vecteurs de la base \mathcal{B} ont pour coordonnées les composantes covariantes du tenseur métrique, on a : $\det \mathbf{g} \neq 0$ équivaut à $\{\omega_\lambda\}$ est une base de $\mathbf{T}_M^*(\mathcal{V})$.

4 – Le vecteur $\tilde{\mathbf{u}}$ associé à la forme linéaire \mathbf{e}^λ s'écrit $\tilde{\mathbf{u}} = g^{\lambda\mu} \mathbf{e}_\mu$, donc le produit scalaire est

$$\mathbf{g}(\mathbf{e}_\lambda, \tilde{\mathbf{u}}) = g^{\lambda\mu} \mathbf{g}(\mathbf{e}_\lambda, \mathbf{e}_\mu) = g^{\lambda\mu} g_{\lambda\mu} = 1.$$

Attention, dans cette expression, λ est fixé, et la sommation se fait uniquement sur $\mu \dots$ La forme linéaire \mathbf{u}^* associée au vecteur \mathbf{e}_λ s'écrit $\mathbf{u}^* = g_{\lambda\mu} \mathbf{e}^\mu$, donc le produit scalaire est

$$\mathbf{g}^*(\mathbf{e}^\lambda, \mathbf{u}^*) = g_{\lambda\mu} \mathbf{g}^*(\mathbf{e}^\lambda, \mathbf{e}^\mu) = g_{\lambda\mu} g^{\lambda\mu} = 1,$$

où, là encore, la sommation se fait uniquement sur μ . On a donc bien égalité des deux produits scalaires.

Remarque : on notera que $\mathbf{g}(\mathbf{e}_\sigma, \tilde{\mathbf{u}}) = \delta_\sigma^\lambda$ et $\mathbf{g}^*(\mathbf{e}^\sigma, \mathbf{u}^*) = \delta_\lambda^\sigma$.

principe cosmologique, 291, 340
 principe d'équivalence, 335
 produit extérieur, 33
 produit scalaire, 325
 produit vectoriel, 276
 projection stéréographique, 6
 pseudo-sphère, 6
 pulsar, 105

Q

quadri-accélération, 333
 quadri-force, 333, 338
 quadri-force de Lorentz, 246
 quadri-force pure, 246
 quadri-impulsion, 333
 quadri-potentiel, 244, 339
 quadri-vecteur courant électrique, 276, 338
 quadri-vitesse, 332
 quadri-volume, 331

R

rapidité, 334
 redshift, 101, 164, 301
 redshift cosmologique, 311, 342
 référentiel, 89, 334
 référentiel de repos instantané, 95
 référentiel en rotation, 92
 référentiel inertiel, 334, 335
 référentiel localement inertiel, 335
 référentiel synchrone, 91
 Ricci (équation de), 270
 Ricci (identités de), 331
 Ricci (tenseur de), 55, 331
 Riemann (tenseur de), 55, 331
 rotationnel, 276, 328

S

Schwarzschild (coordonnées de), 335
 Schwarzschild (métrique de), 111, 335
 Schwarzschild (rayon de), 114, 336
 Schwarzschild (trou noir de), 111
 seconde forme fondamentale, 75

Shapiro (effet), 124
 signature, 324
 Smarr (formule de), 195
 stationnaire (espace-temps), 90, 109
 statique (espace-temps), 90, 109
 Stefan-Boltzmann (loi de), 306
 Stokes, 226
 structure différentielle, 324
 surface limite de stationnarité, 169
 sursaut gamma, 314
 symétrie maximale, 291

T

taux d'expansion, 303
 temps conforme, 298
 temps cosmique, 291, 340
 temps propre, 325, 332
 temps propre synchronisé, 91
 tenseur énergie-impulsion, 239, 250, 333
 tenseur champ électromagnétique, 247, 261, 338
 tenseur de courbure, 331
 tenseur de Maxwell, 244, 246, 338
 tenseur de polarisation, 217
 tenseur de torsion, 12, 24, 331
 tenseur dérivée covariante, 327, 328
 tenseur des contraintes, 250, 333
 tenseur métrique, 325
 tenseur tangent, 74
 tétrade, 67, 71, 223
 Tolman-Oppenheimer-Volkoff, 263
 topologie, 323
 transformation conforme, 62, 151
 transformation de jauge, 261
 transport parallèle, 31, 329, 330
 trou blanc, 145, 148
 trou noir, 145, 147
 trou noir extrême, 182

U

Univers d'Einstein-de Sitter, 313
 Univers de de Sitter, 307

V

variété différentielle, 324
variété lisse, 324
variété pseudo-riemannienne, 323, 324
variété topologique, 324
vecteur déplacement infinitésimal, 325
vecteur de Killing, 59
vecteur densité d'impulsion, 259, 333
vecteur gradient, 328
vecteur shift, 163, 166, 177, 268
vecteur unitaire, 325

vitesse conforme, 300
vitesse coordonnée, 102, 333
vitesse de récession, 301

W

Weyl (tenseur de), 62, 332

Z

ZAMO, 168