

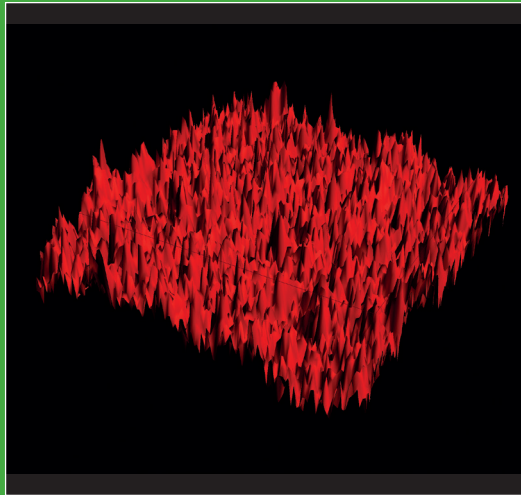
SAVOIRS

PHYSIQUE

ACTUELS

# THÉORIE STATISTIQUE DES CHAMPS

TOME 1



FRANÇOIS DAVID

CNRS ÉDITIONS



edp sciences



François David

# Théorie statistique des champs

*Tome 1*

**SAVOIRS ACTUELS**

---

**EDP Sciences/CNRS ÉDITIONS**

## Dans la même collection

*Comprenons-nous vraiment la mécanique quantique ? 2<sup>e</sup> édition*  
Franck Laloë

*Mécanique Quantique - Tomes 1, 2 et 3 - Nouvelle édition*  
Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu et Franck Laloë

*Calculs et algorithmes quantiques*  
David Mermin

*Relativité restreinte*  
Ericourgoulhon

*Hydrodynamique physique - 3<sup>e</sup> édition*  
Étienne Guyon, Jean-Pierre Hulin et Luc Petit

*Analyse dans les espaces métriques*  
Hervé Pajot et Emmanuel Russ

Retrouvez tous nos ouvrages et nos collections sur  
<http://laboutique.edpsciences.fr>

Imprimé en France

© 2019, **EDP Sciences**, 17, avenue du Hoggar, BP 112, Parc d'activités de Courtabœuf, 91944 Les Ulis Cedex A

et

**CNRS Éditions**, 15, rue Malebranche, 75005 Paris.

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés réservés pour tous pays. Toute reproduction ou représentation intégrale ou partielle, par quelque procédé que ce soit, des pages publiées dans le présent ouvrage, faite sans l'autorisation de l'éditeur est illicite et constitue une contrefaçon. Seules sont autorisées, d'une part, les reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective, et d'autre part, les courtes citations justifiées par le caractère scientifique ou d'information de l'œuvre dans laquelle elles sont incorporées (art. L. 122-4, L. 122-5 et L. 335-2 du Code de la propriété intellectuelle). Des photocopies payantes peuvent être réalisées avec l'accord de l'éditeur. S'adresser au : Centre français d'exploitation du droit de copie, 3, rue Hautefeuille, 75006 Paris. Tél. : 01 43 26 95 35.

EDP Sciences,  
ISBN (papier) : 978-2-7598-2158-7, ISBN (ebook) : 978-2-7598-2160-0  
CNRS Éditions,  
ISBN (papier) : 978-2-271-13056-3, ISBN (ebook) : 978-2-271-13057-0

# Table des matières

<b>Introduction du tome 1</b>	<b>v</b>
0.1 But de l'ouvrage	v
0.2 Contenu de l'ouvrage	vi
0.3 Remerciements	viii
0.4 Bibliographie sommaire	ix
0.5 Plan structuré du tome 1	xi
<b>I Mécanique quantique et intégrale de chemin</b>	<b>1</b>
<b>1 Rappels de mécanique classique et quantique</b>	<b>3</b>
1.1 Mécanique classique	3
1.2 Mécanique quantique	17
1.3 Mécanique statistique quantique	26
1.4 Notes	33
<b>2 L'intégrale de chemin : introduction</b>	<b>35</b>
2.1 Présentation	35
2.2 L'intégrale de chemin pour la particule libre	37
2.3 La particule dans un potentiel $V(q)$	42
2.4 Observables et fonctions de corrélations	47
2.5 Système quantique à température finie : temps euclidien périodique	54
2.6 L'oscillateur harmonique	61
2.7 Notes	68
<b>3 Intégrale de chemin et physique statistique</b>	<b>69</b>
3.1 Introduction	69
3.2 Intégrale de chemin et processus stochastique	69
3.3 Mécanique quantique euclidienne et physique statistique 1D	75
3.4 Notes	82

<b>4</b>	<b>L'intégrale de chemin : présentation générale</b>	<b>83</b>
4.1	Introduction . . . . .	83
4.2	Systèmes à plusieurs degrés de liberté . . . . .	83
4.3	Hamiltonien dépendant du temps . . . . .	86
4.4	Méthode du col et limite semi-classique . . . . .	87
4.5	Intégrale de chemin dans l'espace de phase . . . . .	94
4.6	Densité de niveaux et formule des traces . . . . .	98
4.7	La particule chargée dans un champ classique . . . . .	101
4.8	La particule relativiste . . . . .	106
<b>5</b>	<b>Systèmes à <math>N</math>-corps : bosons, fermions, spin</b>	<b>115</b>
5.1	Intégrale de chemin pour les bosons . . . . .	115
5.2	États cohérents et intégrale de chemin pour le spin . . . . .	136
5.3	Fermions, algèbre de Grassmann et intégrale de chemin anti-commutante . . . . .	144
5.4	Conclusion : avantages et désavantages de l'intégrale de chemin	153
5.5	Notes . . . . .	155
<b>II</b>	<b>Théorie des champs et intégrale fonctionnelle</b>	<b>157</b>
<b>6</b>	<b>L'intégrale fonctionnelle : le champ libre</b>	<b>159</b>
6.1	Introduction . . . . .	159
6.2	Le champ libre comme limite continue du modèle gaussien . . .	160
6.3	La fonction de corrélation à deux points et le propagateur . . . . .	173
6.4	Fonctions de corrélation à $N$ points et théorème de Wick . . . . .	180
6.5	Configurations du champ libre gaussien . . . . .	183
6.6	Opérateurs composites et développement à courte distance (OPE) . . . . .	187
6.7	Équations quantiques du mouvement (Schwinger-Dyson) . . . . .	199
6.8	Champ libre, particule relativiste et marches aléatoires . . . . .	201
6.9	Du champ scalaire aux bosons non relativistes . . . . .	203
6.10	Notes . . . . .	204
<b>7</b>	<b>La théorie des champs <math>\phi^4</math> : théorie des perturbations</b>	<b>207</b>
7.1	Introduction . . . . .	207
7.2	Intégrale fonctionnelle pour la théorie $\phi^4$ . . . . .	208
7.3	Le développement perturbatif : diagrammes de Feynman . . . .	212
7.4	Fonctions de corrélations et diagrammes connexes . . . . .	226

7.5	Diagrammes et amplitudes irréductibles . . . . .	231
7.6	L'action effective $\Gamma[\varphi]$ . . . . .	238
7.7	Calcul des amplitudes de Feynman . . . . .	249
7.8	Équations de Schwinger-Dyson . . . . .	258
7.9	Symétries, courants conservés et théorème de Noether . . . . .	259
7.10	Notes . . . . .	264
<b>8</b>	<b>La théorie <math>\phi^4</math> : Renormalisation à l'ordre d'une boucle</b>	<b>265</b>
8.1	Introduction . . . . .	265
8.2	Régularisations UV . . . . .	266
8.3	Les divergences UV en $D = 4$ . . . . .	274
8.4	Renormalisation de $\phi^4$ à $D = 4$ : principe . . . . .	278
8.5	Renormalisation de la théorie de masse nulle à $D = 4$ . . . . .	283
8.6	Renormalisation de la théorie massive pour $D = 4$ . . . . .	286
8.7	Échelle de renormalisation et couplages effectifs . . . . .	288
8.8	Transformations d'échelle et groupe de renormalisation . . . . .	294
8.9	Renormalisation de $\phi^4$ en dimension $D < 4$ . . . . .	299
8.10	Analyse des flots du groupe de renormalisation . . . . .	305
8.11	Renormalisation dimensionnelle . . . . .	311
8.12	Notes . . . . .	312
<b>9</b>	<b>Renormalisation perturbative : aperçu général</b>	<b>313</b>
9.1	Introduction . . . . .	313
9.2	Divergences UV et comptage de puissance . . . . .	313
9.3	Renormalisation et contretermes . . . . .	322
9.4	Premier aperçu historique . . . . .	325
9.5	Notes . . . . .	328
	<b>Index</b>	<b>329</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>334</b>





# Introduction du tome 1

## 0.1 But de l'ouvrage

Ce livre présente une introduction aux principaux concepts et outils communs à la physique statistique et à la théorie quantique des champs : développements perturbatifs et diagrammes de Feynman, intégrales de chemin et intégrales fonctionnelles, théorie de la renormalisation et groupe de renormalisation.

Ces concepts et ces techniques mathématiques sont apparus à partir des années 1940-1950 à la fois en physique des hautes énergies (QED, théorie de la renormalisation, théories de jauge non abéliennes), en physique du problème à N-corps (physique nucléaire, physique de la matière condensée) et en physique statistique. Ces développements croisés ont culminé au début des années 1970 avec les applications du groupe de renormalisation à la fois (1) en physique des hautes énergies : construction du modèle standard des interactions électrofaibles et de la chromodynamique quantique, liberté asymptotique, et (2) en physique statistique par la théorie moderne des phénomènes critiques : les transitions de phase continues et les comportements critiques associés sont en fait décrits par des théories quantiques des champs !

Depuis ces idées et ces méthodes théoriques se sont appliquées à de très nombreux domaines de la physique statistique (phénomènes critiques, systèmes désordonnés, phénomènes hors équilibre, processus de croissance), de la physique de la matière condensée (physique des solides, matière molle, systèmes mésoscopiques), de la physique des systèmes quantiques (atomes froids), des systèmes dynamiques (transition vers le chaos, turbulence, systèmes complexes), pour citer les principaux. Elles sont en train d'irriguer et d'inspirer des domaines importants des mathématiques. Elles sont regroupées souvent sous le terme de « théorie statistique des champs ». Plutôt qu'une théorie comme la relativité ou la mécanique quantique, la théorie statistique des champs est une « boîte à outils » (outils venus de la physique statistique et de la physique quantique) dont le contenu est maintenant indispensable au physicien théoricien.

Ces succès reposent sur deux éléments.

(1) Tout d'abord il existe une analogie profonde entre le traitement mathématique des fluctuations thermiques en physique statistique et celui des « fluctuations quantiques » (principe d'incertitude) en physique quantique. Cette

analogie est particulièrement claire dans la formulation de la mécanique quantique en termes d'intégrale de chemins (Feynman). Une intégrale de chemin en « temps imaginaire » est analogue à une somme sur les micros états d'un système statistique classique 1D dans l'ensemble grand canonique, la constante de Planck  $\hbar$  jouant le rôle de la température  $T$ . Cette analogie se généralise très naturellement entre les champs quantiques en  $D$  dimensions d'espace et les systèmes statistiques étendus en  $D + 1$  dimensions.

(2) Ensuite, les théories quantiques des champs (en général) et les phénomènes critiques sont des systèmes physiques avec un très grand nombre de degrés de liberté indépendants où les fluctuations (quantiques et statistiques) sont importantes sur une très grande gamme d'échelles de distance (longueur d'onde) et de fréquence (énergie). Leurs couplages et leur influence sur la dynamique « effective » du système ne peuvent être traités simplement. La théorie du groupe de renormalisation permet précisément de contrôler – plus ou moins proprement – ces couplages multi-échelles, en définissant proprement le concept de « théorie effective » et en permettant de calculer les « couplages effectifs ». Elle permet de dégager quels sont les degrés de liberté importants (en théorie quantique quels sont les champs) pour décrire la dynamique d'un système à une échelle donnée. De ce point de vue, le groupe de renormalisation a révolutionné notre façon d'aborder de nombreux problèmes en physique (nature des interactions fondamentales, émergence de comportements complexes, apparition de lois d'échelles) et au-delà.

Il faut aussi mentionner d'autres idées très importantes qui font partie de cette boîte à outil, en particulier dans l'étude des systèmes de basse dimensionnalité et des systèmes désordonnés : excitations topologiques (solitons, vortex, instantons) et effets non perturbatifs, solutions exactes et systèmes intégrables, invariance conforme, supersymétrie... Elles forment le socle de la théorie des cordes. Elles sont également à l'origine des contacts et de la fertilisation croisée entre la théorie quantique des champs et les mathématiques.

Enfin un certain nombre de méthodes de discrétisation (théories sur réseau, développements de couplage fort) et de méthodes de simulations numériques (Monte-Carlo), venues de la physique statistique, sont devenues des outils standards en théorie quantique des champs et en physique des hautes énergies.

## 0.2 Contenu de l'ouvrage

Cet ouvrage est donc une introduction aux applications de la théorie des champs à la mécanique statistique. Son contenu est cohérent, il peut être utilisé seul, ainsi que comme une introduction à certains aspects de la physique des champs et des particules, et à la physique statistique des systèmes à l'équilibre. Il ne dispense pas de la pratique de traités de théorie quantique des champs pour la physique des hautes énergies, ni d'ouvrages consacrés à la physique statistique et à la physique de la matière condensée.

Ce manuel est divisé en quatre grandes sections, et pour des raisons pratiques en deux tomes. Ce premier tome se compose des parties I et II, et traite plutôt des aspects théorie quantique et théorie quantique des champs. Le deuxième tome se composera des parties III et IV, et traitera tout d'abord des aspects « statistique » et des applications en physique statistique de la théorie.

La partie I traite de l'intégrale de chemin en mécanique quantique. Le but de cette partie est de bien faire comprendre l'analogie entre physique statistique à l'équilibre et mécanique quantique (formalisme du temps imaginaire). Les chapitres 1, 2 et 3 en forment la partie essentielle. Les chapitres 4 et 5 présentent des aspects plus avancés. Ils peuvent être sautés en première lecture, et leurs différentes sections peuvent être lues indépendamment en général.

La partie II est une introduction à l'intégrale fonctionnelle en théorie quantique des champs, partir de l'exemple de la théorie scalaire  $\phi^4$ . Les formulations de la théorie à temps réel et à temps euclidien et les règles de Feynman pour construire la théorie des perturbations sont traitées dans les chapitres 6 et 7. La théorie de la renormalisation perturbative et les équations du groupe de renormalisation sont introduites en détail au premier ordre dans le chapitre 8. Une brève introduction aux aspects plus généraux de la renormalisation perturbative est donnée dans le chapitre 9. Les formulations non perturbatives de la renormalisation « à la Wilson » et l'équivalence entre la théorie des champs  $\phi^4$  renormalisée et la limite d'échelle au point critique du modèle d'Ising sont abordées dans le tome 2.

La partie III traitera de la physique statistique des phénomènes critiques et de la théorie du groupe de renormalisation dans l'espace réel. Après un rappel des concepts de base de physique statistique, la théorie du champ moyen et la théorie de Landau des phénomènes critiques seront introduites. Le principe de la théorie de K. Wilson du groupe de renormalisation et ses conséquences pour les phénomènes critiques seront ensuite explicités. Un chapitre sera consacré à des calculs explicites sur la théorie de Landau-Ginsburg-Wilson (LGW), essentiellement dans l'approximation du potentiel local. Ceci illustrera la puissance de la théorie de Wilson, et permettra de discuter en profondeur les relations entre renormalisation de Wilson et renormalisation perturbative en théorie des champs.

La partie IV présentera des applications physiques de la théorie statistique des champs en physique statistique et en physique de la matière condensée. Elle contiendra également une introduction à des aspects plus avancés et modernes : invariance conforme, effets de taille finie. Les différents exemples pourront s'étudier indépendamment.

En principe, les parties I (intégrale de chemin en mécanique quantique) et III (mécanique statistique, phénomènes critiques et groupe de renormalisation) peuvent être lues indépendamment (bien que pour la fin de la partie III il vaille mieux avoir vu I et le début de II). La partie II (théorie quantique des

champs et renormalisation) peut être lue à la suite de I, et indépendamment de III.

Mettons en garde le lecteur à propos de ce qu'il ne trouvera pas, ou peu, dans cet ouvrage :

- une exposition détaillée aux méthodes numériques et de calcul formel (analyse des développements en séries de hautes températures, simulations par Monte-Carlo, matrice de transfert) ;
- une introduction aux méthodes exactes (systèmes intégrables, ansatz de Bethe, matrice S) ;
- un traité sur l'invariance conforme et les techniques reliées (gaz de Coulomb, dualité) ;
- une introduction à la physique des systèmes désordonnés (un sujet en soi) ;
- un traité sur les approches mathématiques rigoureuses (théorie constructive des champs, groupe de renormalisation exact, théorie de la renormalisation à tous les ordres) ;
- une introduction au groupe de renormalisation pour les systèmes quantiques.

### 0.3 Remerciements

Ce livre est issu principalement des notes destinées aux étudiants du cours de deuxième année du parcours « Physique théorique » du Master « Concepts fondamentaux de la physique », que j'ai donné à l'École normale supérieure (et dans les locaux de l'université Denis Diderot) de 2001 à 2015. Je tiens à remercier tout particulièrement Jesper Jacobsen, qui m'a assisté pour construire et assurer les séances d'exercices, et m'a remplacé pour les cours à l'occasion pendant toutes ses années. Je suis également très reconnaissant à Édouard Brézin, à qui je dois l'opportunité d'avoir donné ce cours, ainsi qu'à Costas Bachas et Adel Bilal, qui ont coordonné ce parcours, et mes collègues enseignants et administratifs (en particulier Nicole Ribet et Mascia Reato). Cet ouvrage a également beaucoup bénéficié des cours que j'ai donnés dans d'autres établissements, à commencer par celui de théorie quantique des champs pour le programme *Perimeter Scholars International* du Perimeter Institute, que je donne depuis 2009, et de celui pour le programme doctoral de la Suisse romande que j'ai donné à l'École polytechnique fédérale de Lausanne. Je tiens donc à remercier chaleureusement Neil Turok, Tibra Ali, David Gerson et Dan Wohn du Perimeter, ainsi que Frédéric Mila et Aurelio Bay de l'EPFL. Avoir pu enseigner dans de telles institutions est pour moi une chance inestimable.

Michèle Leduc et Michel Le Bellac m'ont encouragé à faire de ces notes un ouvrage. Je les remercie infiniment pour leur persévérance et leur patience... Merci à Michel pour le temps passé à relire mes notes. De nombreux collègues

m'ont, à divers stades, encouragé, conseillé ou inspiré pour la préparation de mes cours et l'écriture de ces notes. Je ne saurais me les remémorer tous, mais je tiens à mentionner, outre Jesper, Costas et Adel déjà cités, Denis Bernard, Michel Bauer, Olivier Parcollet et Jean Zinn-Justin.

Enfin, mes remerciements et ma gratitude vont bien sûr à tous les étudiants et les étudiantes qui ont suivi mes cours, pour leur intérêt, leur patience, leurs questions et leurs critiques. Ce sont eux qui ont été ma principale source de motivation et d'inspiration pour travailler sur ce cours et préparer ces notes.

## 0.4 Bibliographie sommaire

La littérature sur le sujet est très riche, et il existe déjà d'excellents ouvrages d'introduction à la physique quantique, la physique statistique, la théorie des champs et la théorie statistique des champs. Cet ouvrage essaye d'avoir une présentation quelque peu originale du sujet, surtout en ce qui concerne les relations entre groupe de renormalisation perturbatif et groupe de renormalisation wilsonien, mais je me suis inspiré consciemment ou inconsciemment de plusieurs ouvrages et cours que j'ai eu l'occasion de suivre.

### Ouvrages en français

En mécanique classique, les livres de L.D. Landau et E.M. Lifchitz [LL94] et le livre de V. Arnold [Arn74] sont des ouvrages de base. Pour la mécanique quantique, les deux volumes incontournables de C. Cohen-Tannoudji, B. Diu et F. Laloë [CTDL73a] et le récent troisième volume de C. Cohen-Tannoudji, F. Laloë et B. Diu [CTLD17], sont des références ainsi que le livre de M. Le Bellac [LB13a, LB13b]. Pour une introduction à la mécanique statistique, on peut citer les deux volumes de cours de R. Balian [Bal82, Bal94]. Le livre de J. Zinn-Justin [ZJ12] est une introduction détaillée à l'intégrale de chemin en mécanique quantique.

Le classique (un peu ancien) ouvrage de C. Itzykson et J.-B. Zuber [ID13] est une bonne introduction à la théorie quantique des champs, plutôt du point de vue physique des hautes énergies.

Les deux volumes (un peu plus récents) de C. Itzykson et J.-M. Drouffe [ID13, ID89], et de M. Le Bellac [LB12] sont des introductions classiques à la théorie statistique des champs.

### Ouvrages en anglais

Si on considère l'anglais, qui est la *lingua franca* de la communauté scientifique, et tend à le devenir pour l'enseignement pré-doctoral et doctoral, la littérature devient immense.

Les ouvrages en français précités sont pour la plupart disponibles en version anglaise : pour la mécanique quantique, le traité de Cohen-Diu-Lalo

[CTDL92], celui de M. Le Bellac [LB06], celui de J. Zinn-Justin [ZJ10] ; pour la théorie des champs, ceux de C. Itzykson et J.-B. Zuber [IZ12], de C. Itzykson et J.-M. Drouffe [ID91], et celui de M. Le Bellac [LBB91].

Des ouvrages très classiques sont pour la théorie quantique des champs (donc surtout orientés physique des hautes énergies) : le traité de S. Weinberg [Wei95] (le premier des trois volumes pour ce qui est traité ici), le livre de M.E. Peskin et D.V. Schroder [PS18]. Le livre J. Zinn-Justin [ZJ02] est une bible orientée à la fois vers la physique des hautes énergies et la physique statistique. Beaucoup moins rigoureux et moins complet mais stimulant est le livre de A. Zee [Zee10]. Et pour ne pas oublier l'école russe, citons l'inspirant livre de A. Polyakov [Pol87].

Pour la théorie statistique des champs et ses applications à la mécanique statistique, citons (outre le Zinn-Justin) le livre de G. Parisi [Par98] et plus courts mais plus récents, les ouvrages de E. Brézin [Bré10] et de J. Cardy [Car96]. Des ouvrages récents orientés vers la physique de la matière condensées sont ceux de A.M. Tsvelik [Tsv07], de E. Fradkin [Fra13] et la très complète introduction à la physique de la matière condensée de P.M. Chaitkin et T.C. Lubensky [CL00].

Des références de base sur les méthodes mathématiques pour la physique théorique, indispensables pour un lecteur peu familier avec les outils mathématiques utilisés dans cet ouvrage, sont les ouvrages classiques de L. Schwartz et D. Huet [SH82] et de R. Courant et D. Hilbert [CH08] (ancien mais actualisé), et le traité plus récent et plus moderne de M. Stone et P. Goldbart [SG09].

Des références plus précises ou plus avancées seront données à la fin des différents chapitres.

## 0.5 Plan structuré du tome 1

### Basique (première lecture)

1 Rappels de mécanique classique et quantique

2 Intégrale de chemin : introduction

3 Intégrale de chemin et physique statistique

6 Intégrale fonctionnelle : le champ libre

7  $\phi^4$  : théorie des perturbations

8  $\phi^4$  : renormalisation à 1 boucle

### Avancé (seconde lecture)

4 Intégrale de chemin : présentation générale

5 Bosons, fermions et spins

9 Renormalisation : théorie générale





Première partie

Mécanique quantique  
et intégrale de chemin



# Chapitre 1

## Rappels de mécanique classique et quantique

Ce chapitre est consacré à des rappels standard de mécanique classique, de mécanique quantique et de physique statistique. Ceci afin de définir les concepts de base et de fixer les notations. Pour le lecteur qui n'est pas (ou plus) familier avec la mécanique classique analytique, nous renvoyons aux ouvrages classiques de Landau & Lifshitz [LL94] et de V.I. Arnold [Arn74].

### 1.1 Mécanique classique

#### 1.1.1 Formulation lagrangienne

##### Espace des configurations

Dans la formulation lagrangienne, un système classique est décrit par son *espace des configurations*  $\mathcal{C}$  et la loi d'évolution dynamique dans cet espace.  $\mathcal{C}$  est l'espace des configurations instantanées possibles à un instant donné. Si le système a un nombre fini  $N$  de degrés de libertés,  $\mathcal{C}$  est une variété (réelle) de dimension  $N$ . Une configuration instantanée du système sera un point  $\mathbf{q}$  de  $\mathcal{C}$ . Dans un système de coordonnées local de  $\mathcal{C}$  au voisinage de cette configuration, les coordonnées locales d'un point  $\mathbf{x}$  sont les  $\{x^i\}_{i=1,N}$  et donc pour la configuration  $\mathbf{q}$  on utilise la notation  $\mathbf{q} = \{q^i\}_{i=1,N}$ . La configuration du système évolue au cours du temps  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$  et la vitesse instantanée (vélocité) est le vecteur tangent  $\dot{\mathbf{q}}$ , avec

$$\mathbf{q} = \{q^i\}, \quad \dot{\mathbf{q}} = \{\dot{q}^i\} = \left\{ \frac{dq^i}{dt} \right\} \quad (1.1)$$

On utilise la notation standard d'Einstein où les composantes d'un vecteur contravariant (coordonnées ou positions, vitesses, champs de vecteurs, etc.) sont étiquetées par des exposants, alors que celles d'un objet covariant (éléments d'une base, composante d'une forme différentielle) sont étiquetées par des indices. Mathématiquement,  $\mathcal{C}$  est une variété différentielle, les vitesses appartiennent au fibré tangent à  $\mathcal{C}$ .

### Exemple : $\mathcal{N}$ particules ponctuelles

Donnons tout de suite un exemple simple :  $N$  particules ponctuelles et discernables, sans contraintes et se déplaçant dans l'espace euclidien de dimension  $D$ ,  $E = \mathbb{R}^D$ . L'espace des configurations est donc  $\mathcal{C} = E^{\mathcal{N}} = \mathbb{R}^{\mathcal{N}D}$ , de dimension  $\dim(\mathcal{C}) = \mathcal{N}D$ . Les coordonnées de l'espace des configurations sont les  $D$  coordonnées spatiales (indexées par les directions  $\mu = 1, \dots, D$ ) des  $\mathcal{N}$  particules (indexées par  $a = 1, \dots, \mathcal{N}$ ). Donc on note les configurations  $\mathbf{q} = \{q^i\} = \{q^{\mu,a}\}$ .

### Équations d'Euler-Lagrange

En mécanique classique, l'évolution du système est donnée par les équations du mouvement, qui sont en général des équations différentielles du deuxième ordre par rapport au temps  $t$ .

Pour des systèmes conservatifs (sans dissipation) les équations du mouvement dérivent (en général) d'un lagrangien  $\mathcal{L}$ . Le lagrangien est une fonction de la configuration (position) et de la vélocité instantanée (vitesse)  $\mathcal{L}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$ . Le lagrangien peut dépendre explicitement du temps, dans le cas d'un système nonconservatif. Ce sont les équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} \quad (1.2)$$

qui en termes, de composantes correspondent aux  $N$  équations

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))}{\partial \dot{q}^i(t)} = \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))}{\partial q^i(t)} \quad , \quad i = 1, \dots, N \quad (1.3)$$

### Exemple : la particule 1D dans un potentiel

Le cas le plus simple est celui d'une particule de masse  $m$  dans un champ de force dérivant d'un potentiel  $V$  indépendant du temps. Dans le cas unidimensionnel, la particule est sur une ligne,  $N = 1$  et la coordonnée  $q$  est la position de la particule  $q \in \mathcal{C} = \mathbb{R}$ . Le lagrangien est l'énergie cinétique moins l'énergie potentielle

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - V(q) \quad (1.4)$$

Les équations du mouvement sont

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \frac{d}{dt} (m\dot{q}) + \frac{dV(q)}{dq} = m \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{dV(q)}{dq} = 0 \quad (1.5)$$

donc l'équation de Newton pour une force dérivant d'un potentiel

$$m \ddot{q}(t) = F(q(t)) = -\frac{\partial}{\partial q} V(q) \quad (1.6)$$

- [ZJ10] J. Zinn-Justin. *Path Integrals in Quantum Mechanics*. Oxford Graduate Texts. OUP Oxford, 2010.
- [ZJ12] J. Zinn-Justin. *Intégrale de chemin en mécanique quantique : introduction*. Savoirs Actuels. EDP Sciences, 2012.

# THÉORIE STATISTIQUE DES CHAMPS I

FRANÇOIS DAVID

Les idées du groupe de renormalisation développées pour la physique statistique dans les années 1970, en grande partie grâce au prix Nobel de physique Kenneth Wilson, ont entièrement renouvelé ce que l'on appelait la théorie relativiste des champs quantiques, née dans les années 1930 et développée sous la forme de l'électrodynamique quantique dans les années 1950. Un résultat de ce renouvellement est la théorie statistique des champs, une boîte à outils de tout physicien théoricien, de la physique des hautes énergies à la physique statistique.

Ce livre, qui repose sur un enseignement de plusieurs années, notamment dans le parcours « Physique théorique » du Master 2 « Concepts fondamentaux de la physique », à l'École normale supérieure, est une introduction pédagogique à cet ensemble incontournable de notions. Il est destiné aux étudiants et aux chercheurs.

La théorie statistique des champs repose sur la profonde analogie entre les fluctuations quantiques d'un système quantique en dimension d'espace  $D$  et les fluctuations thermiques d'un système classique en équilibre à une température absolue  $T$  dans un espace de dimension  $(D + 1)$ , la constante de Planck  $h$  jouant le rôle de la température  $T$ . Ce premier tome développe l'aspect « quantique » de la théorie. La première partie du livre est consacrée à l'intégrale de chemin, qui permet de mettre en évidence d'une façon particulièrement claire cette correspondance entre les deux types de fluctuations, sans négliger des aspects avancés (bosons et fermions, états cohérents, spin). Dans une deuxième partie, l'auteur utilise l'exemple typique de la théorie en  $\varphi^4$  pour un exposé détaillé de l'intégrale fonctionnelle, du développement perturbatif, des graphes de Feynman, de la renormalisation perturbative et du groupe de renormalisation en théorie des champs. Le deuxième tome sera consacré aux applications du groupe de renormalisation à la physique statistique, en particulier le calcul des exposants critiques. Seront aussi abordés des sujets reliés : modèle XY, polymères, chaînes de spin, moullage et membranes, ainsi qu'une introduction à l'invariance conforme et à l'invariance d'échelle en taille finie.

*François David est Directeur de Recherche au CNRS à l'Institut de Physique Théorique du CEA Saclay, ses recherches portent sur la physique quantique, la théorie quantique des champs et la gravitation quantique, la physique statistique et celle des systèmes biologiques.*

Série Physique dirigée par Michèle LEDUC et Michel LE BELLAC

## SAVOIRS ACTUELS

Collection dirigée par Michèle LEDUC

CNRS ÉDITIONS

[www.cnrseditions.fr](http://www.cnrseditions.fr)



edp sciences  
[www.edpsciences.org](http://www.edpsciences.org)

Création graphique : Béatrice Couëdel



ISBN EDP Sciences 978-2-7598-2158-7  
ISBN CNRS ÉDITIONS 978-2-271-13056-3

49 €

Ces ouvrages, écrits par des chercheurs, reflètent des enseignements dispensés dans le cadre de la formation à la recherche. Ils s'adressent donc aux étudiants avancés, aux chercheurs désireux de perfectionner leurs connaissances ainsi qu'à tout lecteur passionné par la science contemporaine.