

INTRO UNE INTRODUCTION À DUCC TION

VOYAGE DANS LES MATHÉMATIQUES DE L'ESPACE-TEMPS

Trous noirs, big-bang, singularités

Stéphane Collion

edp sciences

Collection « Une Introduction à »
dirigée par Michèle Leduc et Michel Le Bellac

Voyage dans les mathématiques de l'espace-temps

Trous noirs, big-bang, singularités

Stéphane Collion



EDP Sciences
17, avenue du Hoggar
Parc d'activités de Courtabœuf, BP 112
91944 Les Ulis Cedex A, France

Dans la même collection

L'aventure du grand collisionneur LHC

Daniel Denegri, Claude Guyot, Andreas Hoecker et Lydia Roos,
préface de C. Rubbia

Le climat : la Terre et les hommes

Jean Poitou, Pascale Braconnot et Valérie Masson-Delmotte, préface de J. Jouzel

Aux origines de la masse : particules élémentaires et symétrie fondamentales

Jean Iliopoulos, préface de F. Englert

Les relativités : espace, temps, gravitation

Michel Le Bellac, préface de T. Damour

Le temps : mesurable, réversible, insaisissable ?

Mathias Fink, Michel Le Bellac et Michèle Leduc

La révolution des exoplanètes

James Lequeux, Thérèse Encrenaz et Fabienne Casoli

À l'orée du cosmos

Alain Omont

Vertigineuses symétries

Antony Zee, traduit par Michel Le Bellac

Le temps des neurones – Les horloges du cerveau

Dean Buonomano, traduit par Michel Le Bellac

Retrouvez tous nos ouvrages et nos collections sur <http://laboutique.edpsciences.fr>

Imprimé en France

ISBN (papier) : 978-2-7598-2279-9 – ISBN (ebook) : 978-2-7598-2278-2

© 2019, EDP Sciences, 17, avenue du Hoggar, BP 112, Parc d'activités de
Courtaboeuf, 91944 Les Ulis Cedex A

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés réservés pour tous pays. Toute reproduction ou représentation intégrale ou partielle, par quelque procédé que ce soit, des pages publiées dans le présent ouvrage, faite sans l'autorisation de l'éditeur est illicite et constitue une contrefaçon. Seules sont autorisées, d'une part, les reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective, et d'autre part, les courtes citations justifiées par le caractère scientifique ou d'information de l'œuvre dans laquelle elles sont incorporées (art. L. 122-4, L. 122-5 et L. 335-2 du Code de la propriété intellectuelle). Des photocopies payantes peuvent être réalisées avec l'accord de l'éditeur. S'adresser au : Centre français d'exploitation du droit de copie, 3, rue Hautefeuille, 75006 Paris. Tél. : 01 43 26 95 35.

À Maïa, Lili et Isia.

À Alice, toujours.

Merci...

... à Michel Vaugon et Ericourgoulhon. Leurs enseignements, nos nombreuses discussions (autour de bons repas) et leur vision profonde de la relativité, issue de leur passion pour les mathématiques, m'ont profondément inspiré et ont donc inspiré l'écriture de ce livre. Merci à Eric de m'avoir encouragé à le publier, d'avoir patiemment relu les dernières versions, et de m'avoir fourni les premières et plus belles figures ! J'espère que ce livre saura convaincre Michel de l'utilité de la vulgarisation ! Merci pour votre amitié.

... à mes amis César, Eric, Benoit, Pierre-Yves, Emmanuel, Marc, Camille, d'avoir lu les premières versions de ce livre. C'est l'intelligence de leurs questions et de leurs remarques qui a permis de rendre ce livre bien meilleur.

... à Sophie Hosotte, d'avoir su accepter avec beaucoup de patience mes très nombreuses « dernières corrections », et d'avoir su mettre aussi magnifiquement en forme mon manuscrit. Merci à toute l'équipe d'EDP Sciences.

... enfin, à Michèle et Michel, d'avoir su détecter dans l'horrible manuscrit que je leur avais envoyé l'ébauche d'un livre. C'est leur gentillesse, leurs encouragements, leurs nombreuses relectures, la bienveillance et la profondeur de leurs conseils, qui a permis de transformer mon texte initial en ce beau livre.

... que ce livre soit le témoignage de ma gratitude et de mon affection.

Avant-propos

Ce livre vous invite à un voyage à travers les mathématiques de l'espace-temps, pour en admirer la beauté et la puissance. Il vous propose de découvrir la théorie de la relativité générale d'Einstein, en montrant qu'elle est une théorie fondamentalement géométrique. Nous explorerons ainsi grâce aux mathématiques certains des mystères les plus fascinants de la physique : la gravitation, les paradoxes temporels, les singularités de l'espace-temps, les trous noirs, les trous de ver, le big-bang...

Cacher les mathématiques de la relativité générale, c'est occulter sa nature profonde, et c'est passer à côté de certains de ses aspects les plus merveilleux !

Le but de ce livre n'est donc pas de proposer un texte de plus de vulgarisation de la relativité restreinte ou générale... Il en existe déjà beaucoup, certains excellents.

Il s'agit ici d'un ouvrage de vulgarisation *des mathématiques* de la relativité générale.

Mais c'est surtout un texte qui veut raconter le lien profond entre les mathématiques et la physique, et plus précisément entre la branche des mathématiques que l'on appelle *la géométrie différentielle* et la relativité générale. Nous présenterons donc les idées et phénomènes physiques fascinants de la relativité d'Einstein, comme le fameux *paradoxe des jumeaux*, en montrant qu'ils ne sont que l'expression de la géométrie de l'espace-temps. L'un des buts est en fait d'essayer de montrer que

la relativité générale, c'est de la géométrie.

Ce livre *veut* parler de mathématiques. Par conséquent, contrairement à quasiment tous les auteurs, je n'ai pas cherché à cacher les *formules*... Je trouve cela malhonnête, car c'est nier la nature fondamentale des mathématiques et de la physique. Ainsi, quelques figures ou quelques courts exemples de « formules » extraits d'ouvrages de mathématiques illustreront la présentation des principaux objets mathématiques de la relativité générale.

La vulgarisation scientifique est un art difficile, mais elle est pourtant d'une très grande importance, bien que souvent négligée. En effet, le fossé qui se creuse entre les connaissances générales du « grand public » et les connaissances scientifiques de pointe devient énorme, et cela permet malheureusement la propagation de contre-vérités et l'émergence de « pseudo-sciences ». Dans cet ouvrage, nous voulons témoigner de notre confiance envers les lecteurs, en les invitant à partager une partie de l'une des plus grandes réalisations humaines : les mathématiques.

Il est également fondamental d'expliquer ce que représente la démarche scientifique, pour mieux comprendre les limites de nos connaissances, mais aussi pour prendre confiance dans la valeur de la science. Nous en verrons des exemples dans ce livre.

L'une des difficultés est aussi de savoir à quel niveau se placer. Tout texte de vulgarisation devrait commencer par définir le niveau requis pour l'aborder. Un niveau moindre peut être compensé par une motivation supérieure, et l'envie de se laisser entraîner à la rêverie et à l'émerveillement.

Ce livre se veut à mi-chemin entre vulgarisation et introduction aux cours universitaires. Je pense donc qu'il est abordable sans problème par des étudiants en première ou deuxième année d'étude scientifique, ou pour ceux qui ont suivi un cursus du style ingénieur. Mais il est certainement abordable par toute personne curieuse et motivée par les découvertes scientifiques les plus fascinantes de notre époque.

Bonne lecture !

Table des matières

Avant-propos	v
1 Introduction	1
1.1 La géométrisation de la physique	1
1.2 Les mathématiques dans ce livre	4
1.3 Précisions sur le niveau mathématique de ce texte	5
1.4 Présentation des chapitres suivants	6
2 De l'espace et du temps à l'espace-temps. La relativité restreinte	9
2.1 Préambule	9
2.2 Les notions fondamentales d'observateur et de référentiel	10
2.3 Comparaison des expériences : changements d'observateurs, relativité	12
2.4 Mesures de distance et de durée	16
2.5 Diagrammes d'espace-temps	18
2.6 Lignes d'univers	20
2.7 Mesure de distances, pseudo-distances	21
2.8 Espace euclidien et géométrie	28
2.9 De la géométrie de Newton à la géométrie d'Einstein	41
2.10 La géométrie einstenienne par l'image	49
2.11 Conclusion	69
3 La géométrie riemannienne et les variétés différentielles	71
3.1 Les variétés différentielles : « les super-espaces »	72
3.2 La géométrie riemannienne, le langage de la relativité	76
4 Espace-temps et gravitation : la relativité Générale	81
4.1 De la relativité restreinte à la relativité générale	81
4.2 L'universalité de la chute des corps	82
4.3 Les géodésiques de l'espace-temps	85

4.4	La courbure de l'espace-temps	98
4.5	La relativité générale, une théorie géométrique	104
4.6	Visualiser l'espace-temps courbe	106
4.7	La lumière dans l'espace-temps courbe	110
4.8	Les ondes gravitationnelles	117
4.9	De la théorie à la pratique	122
4.10	Einstein s'est-il « trompé » ? La démarche scientifique	126
5	Les Singularités de l'espace-temps	129
5.1	Singularités.....	129
5.2	Trous noirs.....	136
5.3	Big-bang... ..	144
5.4	Trous de ver.....	149
5.5	Réalité des singularités de l'espace-temps.....	153
6	Unification et Géométrisation	155
6.1	De l'unification en physique	155
6.2	Le principe du catalogue	155
6.3	La géométrisation de la physique	157
6.4	L'unification de la gravitation et de l'électromagnétisme	158
6.5	L'espace-temps de Kaluza-Klein	160
6.6	Réalité des dimensions supplémentaires	162
7	Quelques réflexions sur les mathématiques, la physique, et la vulgarisation	165
7.1	Du plaisir de faire des mathématiques	165
7.2	De l'élégance de la relativité générale	167
7.3	L'Univers sans foi ni loi.....	168
7.4	De l'intérêt de la recherche fondamentale.....	169
7.5	Des Mathématiques et de la vulgarisation	173
7.6	Dernières remarques sur les rapports entre mathématiques et physique	175
	Annexe A	177
	Bibliographie	199

1

Introduction

1.1 La géométrisation de la physique

Au commencement était l'espace-temps et la liberté.
Puis sont venus les physiciens, leurs lois et leurs machines.

Les mathématiques et la physique sont sans doute deux aspects d'un même plaisir intellectuel, une compréhension de l'univers qui nous entoure.

La physique tente de modéliser la nature pour, d'une part chercher à en comprendre le fonctionnement, et, d'autre part, prédire son évolution ou du moins le résultat d'expériences qui portent sur elle. Il se trouve que c'est à travers les mathématiques que la physique s'exprime le mieux, à travers elles que ses modèles sont le plus efficaces.

De son côté, les mathématiques cherchent à extraire des structures communes à divers aspects de la nature, comme les nombres qui servent aussi bien à compter les étoiles dans le ciel que les moutons d'un troupeau, ou les figures géométriques qui peuvent décrire aussi bien la trajectoire des planètes autour du Soleil que la forme des champs que veulent se partager des paysans. Autrement dit, *les mathématiques servent à simplifier le réel*. (Ce à quoi certains pourraient répondre que c'est raté !) Puis, une fois définies ces structures, les mathématiques s'amuse à les faire vivre puis à les questionner pour mieux les comprendre, quitte à s'éloigner de leur origine naturelle. Les mathématiques ont ainsi leur logique propre, et une immense partie des mathématiques se développe sans aucun lien avec la physique ni aucune volonté d'application concrète.

Mais il est fascinant de constater qu'après avoir évolué dans les mains (ou plutôt la tête !) des mathématiciens, des structures et des développements

purement mathématiques peuvent revenir vers les physiciens pour leur offrir de nouveaux concepts avec lesquels ils pourront modéliser de nouveau la nature de manière plus précise et sophistiquée. Puis cet échange entre mathématiques et physique recommence, à un niveau toujours plus élevé, à partir de questionnements de la physique, ou parfois, d'ailleurs, des mathématiques.

C'est très typiquement le cas de la *relativité générale*, la théorie de la gravitation d'Einstein. À partir de questions sur la nature du temps, de l'espace et de la gravitation, Einstein est allé chercher les outils de la géométrie différentielle, une branche importante des mathématiques qui s'était développée très loin au-delà des problèmes physiques qui l'avaient fait naître durant l'Antiquité, et avait connu un développement important au XIX^e siècle avec des mathématiciens comme Gauss puis Riemann.

Une fois posé par Einstein le modèle mathématique de l'espace-temps et de la gravitation à partir des objets développés antérieurement par les mathématiciens, le travail des physiciens consiste à en extraire une vision et des outils physiques leur permettant d'aller explorer l'univers pour en obtenir une meilleure description.

Mais les mathématiques ont également servi de moyen d'exploration de certains des aspects les plus extraordinaires de la relativité générale. Nous verrons ainsi, au chapitre 5, que deux mathématiciens et physiciens exceptionnels, *Roger Penrose et Stephen Hawking*, ont utilisé des méthodes purement mathématiques, des techniques très subtiles de topologie et de géométrie différentielle, pour démontrer de manière purement mathématique l'existence très probable des trous noirs et du big-bang.

Les mathématiciens aiment aussi revenir sur les théories physiques, surtout quand elles sont aussi belles et bien posées mathématiquement que la relativité, pour voir si on peut en tirer de nouveaux développements et objets mathématiques. Pour les mathématiciens spécialistes de géométrie différentielle, il est donc naturel de chercher à approfondir l'exploration des aspects les plus géométriques de la relativité générale, pour prolonger l'émerveillement. La géométrie différentielle et la relativité générale sont faites l'une pour l'autre, comme nous le verrons au long de ce livre. La relativité générale a ainsi suggéré depuis 100 ans de nombreux problèmes purement mathématiques, et a entraîné un développement important de la géométrie différentielle.

Poussant plus loin cette démarche, les mathématiciens peuvent s'amuser à chercher si, à l'inverse des physiciens, on ne peut pas voir toute la physique issue du modèle théorique de base de la relativité d'Einstein comme une branche, magnifique par ailleurs, de la géométrie différentielle. Plus précisément, il s'agit de voir si tous les objets physiques dont traitent la relativité générale et l'électromagnétisme, par exemple, ne peuvent être considérés comme des objets de *nature*

géométrique. C'est ce qu'on appelle *la géométrisation de la physique*. Avec la relativité générale, Einstein avait géométrisé la gravitation ; il entreprit immédiatement de poursuivre cette démarche avec l'autre interaction connue à cette époque, l'électromagnétisme.

La première tentative sérieuse d'unification géométrique de la gravitation et de l'électromagnétisme est néanmoins due à Hermann Weyl, un des grands mathématiciens du XX^e siècle, dès 1919. Sa méthode se heurta à des obstructions physiques, de la part d'Einstein lui-même, qui avait pourtant été séduit par cette approche. Mais certaines des premières découvertes de la mécanique quantique devaient être prises en compte.

Une autre tentative, particulièrement spectaculaire, suivit en 1922 : la théorie de Kaluza et Klein, deux mathématiciens. Leur idée, pour inclure l'électromagnétisme dans une même description géométrique que la gravitation, était d'envisager un univers à 5 dimensions ! Là aussi, leur tentative n'aboutit pas, même si Einstein lui-même travailla longtemps sur cette idée. De 1920 à sa mort en 1955, Einstein poursuivit sans relâche, mais sans succès, la quête d'une unification géométrique de la gravitation et de l'électromagnétisme.

Longtemps dénigrées, les tentatives d'Einstein sont aujourd'hui au cœur de la physique théorique. Depuis 30 ans, les méthodes de Weyl, Kaluza et Klein réapparaissent dans les tentatives modernes d'unification de la physique, sous les noms de *théorie de jauge* et de *théorie des cordes*. Nous en reparlerons plus précisément au chapitre 6.

C'est donc à travers des regards de mathématiciens sur une théorie physique, par ailleurs extrêmement efficace, que de nouvelles approches de la physique ont été suggérées. Elles ont été motivées par la nature profondément géométrique de la relativité générale, qui révolutionnait la vision newtonienne de l'espace et du temps. L'idée est de réinscrire dans un cadre mathématique unifié des objets physiques divers pour voir s'ils peuvent être rassemblés dans les objets mathématiques naturellement issus de la géométrie différentielle.

Le but de ce livre est donc de présenter cette vision des rapports entre physique et mathématiques, et plus particulièrement de montrer que relativité générale et géométrie différentielle sont intimement liées. Notons qu'Einstein lui-même était insatisfait de la partie physique de son « équation » (dont nous parlerons au chapitre 4), par opposition à sa partie géométrique.

Contrairement aux autres livres, nous présenterons donc les idées et les phénomènes physiques fascinants de la relativité d'Einstein en montrant leur nature fondamentalement géométrique. Nous montrerons même qu'elle peut être vue *comme de la géométrie « pure »*. Par exemple, le fameux « *paradoxe des jumeaux* » et les différences spectaculaires de vieillissement des personnages du film *Interstellar* seront présentés ainsi.

Nous verrons aussi que les progrès de la physique ont suivi les progrès des mathématiques. Pour passer de la relativité restreinte d'Einstein, Poincaré et Minkowski de 1905 à la relativité générale de 1916, Einstein a dû passer d'une extension, certes géniale, de la géométrie traditionnelle d'Euclide à la géométrie riemannienne, due à Riemann en 1850, que nous décrirons au chapitre 3.

Recherche mathématique et recherche physique apparaîtront ainsi indissociables. Mais contrairement à ce que l'on croit souvent, les mathématiques ne progressent pas toujours en réponse à des questions venant de la physique. L'exemple de la géométrie riemannienne montre que des développements purement internes aux mathématiques ont en général précédé les progrès de la physique. C'est en effet ces concepts mathématiques nouveaux qui ont *inspiré* Einstein, lui permettant de résoudre l'extraordinaire défi qu'il s'était fixé, loin d'ailleurs de tout travail ou besoin expérimental, en cherchant une théorie de la gravitation radicalement différente de celle de Newton, et profondément géométrique.

Cet étonnant pouvoir des mathématiques conduisit le Prix Nobel de physique Eugène Wigner à écrire un célèbre article où il parle de « la déraisonnable efficacité de mathématiques » dans les sciences naturelles.

Il a fallu à Einstein une intuition et un sens physique exceptionnels pour mettre au point sa théorie de la relativité générale. Mais cette théorie n'existerait pas sans les mathématiques très belles et pures que constituent la géométrie riemannienne, et qu'Einstein a su merveilleusement utiliser.

1.2 Les mathématiques dans ce livre

Les mathématiques sont une partie majeure de la culture et du développement de la connaissance humaine. Notre description du monde par les sciences physiques passe par les mathématiques.

Pourtant, les ouvrages de vulgarisation sur la physique moderne, parlant de big-bang, de trous noirs, ou de particules, cherchent systématiquement à en exclure les mathématiques, de peur d'effrayer le lecteur. Or les théories correspondantes, relativité et mécanique quantique, sont fondamentalement mathématiques, dans leur expression mais aussi dans les concepts sur lesquels elles s'appuient. Ne pas parler de mathématiques sur ces sujets, c'est en dissimuler une part essentielle.

L'objectif de ce livre est donc clairement inverse. Notre but est de montrer des mathématiques à l'œuvre, et même quelques formules ! Nous essayerons de faire sentir ce que sont les mathématiques, et pourquoi elles sont indissociables de la physique. Les mathématiques et l'astronomie (qui est aujourd'hui devenue

l'astrophysique) sont nées ensemble, telles des sœurs jumelles ; ce sont les plus vieilles sciences. En les liant ici, nous verrons que les mathématiques ne doivent pas être présentées, comme trop souvent, sous leur aspect « utilitaire », mais comme une approche passionnante de la compréhension de l'univers qui nous entoure.

C'est ce que je me suis efforcé de prouver dans ce texte, dont le but est d'ailleurs de montrer que *la physique, c'est des maths !* (Ce qu'un physicien contestera...)

Dans le texte apparaîtront donc quelques figures « techniques » issues de cours de mathématiques ou de relativité, accompagnées d'un petit extrait de la définition mathématique précise, voire d'une formule. Ces figures sont à prendre comme des dessins ou des tableaux, pour apprécier la beauté des objets mathématiques, et pour montrer les symboles que les chercheurs manipulent.

En fin d'ouvrage, l'annexe donnera des explications plus détaillées des objets mathématiques présentés dans le corps du livre. Il s'adresse aux lecteurs curieux ou exigeants, qui possèdent une certaine maîtrise scientifique, telle une ou deux années d'études scientifiques post-bac. Bien que d'un niveau plus élevé, ces explications demeurent heuristiques. Elles sont suivies d'extraits de cours de niveau Master, mais il ne s'agit pas d'un cours complet. Cela pourra permettre à un lecteur curieux d'avoir une idée plus précise de l'aspect des mathématiques utilisées, et peut servir à un étudiant de motivation supplémentaire.

1.3 Précisions sur le niveau mathématique de ce texte

Comme je l'ai dit dans l'avant-propos, ce livre se veut à mi-chemin entre vulgarisation et introduction aux cours universitaires. Le chapitre 2 traite de la relativité dite restreinte, élaborée en 1905. Les mathématiques sur lesquelles elle s'appuie sont relativement élémentaires, c'est essentiellement le théorème de Pythagore que l'on voit au collège, puis la géométrie affine que l'on voit au cours de la première année post-bac. Néanmoins nous verrons la présentation moderne de cette géométrie, et des généralisations du théorème de Pythagore, adaptées à la relativité.

Mais le sujet de ce livre est clairement la *relativité générale*, élaborée en 1916 par Einstein, dont nous parlons à partir du chapitre 4. Là, les mathématiques à l'œuvre sont beaucoup plus sophistiquées ; il s'agit de la géométrie différentielle et riemannienne. Par conséquent, nous « vulgarisons » sensiblement plus les objets mathématiques, tout en les exposant précisément et rigoureusement.

Je pense que ce texte est abordable sans problème par des étudiants en première ou deuxième année d'études scientifiques, ou pour ceux qui ont suivi

un cursus du style ingénieur. Mais il est certainement abordable par toute personne curieuse et motivée par les découvertes scientifiques les plus fascinantes de notre époque.

Même si certaines parties vous semblent ardues, laissez-vous porter par les mathématiques à l'œuvre dans l'espace-temps, et rêvez sur les idées extraordinaires offertes par la relativité générale : « paradoxe » des jumeaux, singularités de l'espace-temps, espace-temps à cinq dimensions...

1.4 Présentation des chapitres suivants

Pour aider le lecteur, nous présentons ici les différents chapitres et leurs objectifs.

- Chapitre 2 : Bien que le thème central de ce livre soit la relativité générale, nous commencerons par présenter la géométrie de la relativité restreinte. Le but de ce chapitre ne sera pas de faire un exposé complet de relativité restreinte (on pourra pour cela se reporter à l'ouvrage de Michel Le Bellac dans la même collection). Nous introduirons dans ce chapitre des concepts essentiels à la présentation de la géométrie, beaucoup plus sophistiquée, de la relativité générale.
- Chapitre 3 : Le but de ce chapitre est d'introduire le cadre géométrique dans lequel s'exprime la théorie de la relativité générale. Il s'agit de définir les espaces géométriques qui modéliseront l'espace-temps courbé par la gravitation, *les variétés*.
- Chapitre 4 : C'est le cœur de l'ouvrage. Il s'agit de montrer la nature fondamentalement géométrique de la relativité générale.
- Chapitre 5 : Pour montrer de façon spectaculaire les liens entre mathématiques et physique, nous présentons les *théorèmes de singularités de Penrose et Hawking*. Ces théorèmes, purement mathématiques dans leur expression et leur démonstration, prouvent l'existence d'objets physiques extraordinaires, *les trous noirs, le big-bang et les trous de ver*.
- Chapitre 6 : Ce chapitre traite d'une démarche essentielle en physique, l'unification des théories décrivant divers phénomènes, et montre par un exemple, la *théorie de Kaluza-Klein*, comment les mathématiques, et en particulier la géométrie différentielle, peuvent parfois suggérer des méthodes d'unification.
- Chapitre 7 : Un chapitre plus personnel de réflexions sur ce que sont les mathématiques, leur rapport à la physique, l'importance de la recherche fondamentale et de la vulgarisation.

- Annexe : Cet annexe reprend un à un les principaux objets mathématiques de la relativité générale, en en donnant des explications plus détaillées mais sous une forme heuristique. Il regroupe des exemples et des extraits de cours de mathématiques et de relativité générale, pour montrer à quoi ressemblent les outils et les symboles que doivent apprendre les étudiants en mathématiques, et que manipulent les chercheurs en relativité générale.

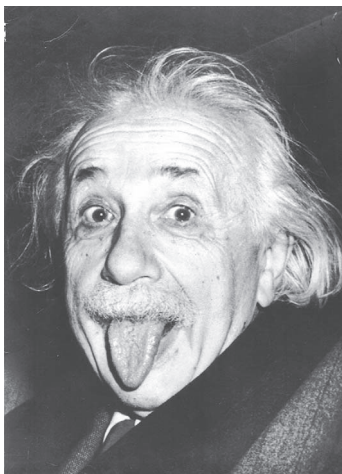


FIGURE 1.1. Albert Einstein. 1879-1955. Physicien, mais aussi mathématicien !

2

De l'espace et du temps à l'espace-temps. La relativité restreinte

2.1 Préambule

Bien que le thème central de ce livre soit la relativité générale, on ne peut commencer sans parler de la relativité restreinte. C'est en fait la description de l'espace-temps sans gravitation. Le but de ce chapitre n'est pas de faire un exposé de relativité restreinte, mais de présenter les outils géométriques qui la fondent, et surtout de présenter la structure géométrique essentielle de l'espace-temps : *son feuilletage par les cônes de lumière*. Nous introduirons également les concepts essentiels de la relativité : diagrammes d'espace-temps, lignes d'univers, courbes de genre temps ou lumière. Cela nous mènera, à partir du chapitre suivant, vers une géométrie encore plus sophistiquée, celle de la relativité générale.

Nous allons donc présenter ici la géométrie utilisée en relativité restreinte. Nous verrons que les effets surprenants de la relativité, dilatation des durées, contraction des longueurs, « paradoxe » des jumeaux de Langevin, ne sont que des effets dus à la géométrie de l'espace-temps. Ainsi apparaîtra l'unité profonde qui existe entre la physique et la géométrie.

Nous ne chercherons pas dans ce livre à faire une présentation historique précise de la relativité ; de nombreux ouvrages ont déjà été écrits sur le sujet. En ce sens, notre présentation de l'évolution des idées sera schématique,

et adoptera un point de vue et un langage (mathématique) modernes. Cette présentation portera essentiellement sur l'évolution du modèle géométrique utilisé pour mesurer les distances et les durées entre les événements physiques, depuis la théorie de Newton jusqu'à celle d'Einstein. Nous verrons donc l'évolution du modèle mathématique, de l'espace et du temps de Newton, vers l'espace-temps d'Einstein.

Nous pouvons quand même présenter le contexte historique de l'émergence de la relativité d'Einstein. En 1900, deux grandes théories dominent la physique : la théorie newtonienne de la gravitation et l'électromagnétisme de Maxwell. Elles décrivent ce qui semble être alors les deux seules forces de l'univers. Leurs succès sont tellement éclatants, qu'un grand physicien de l'époque, Lord Kelvin, déclara que l'on avait atteint la fin de la physique théorique !

Et pourtant de nombreuses expériences montrent à cette époque que ce bel édifice se fissure : les célèbres expériences de Michelson et Morley commencent à suggérer que la vitesse de la lumière est la même pour tous les observateurs, et qu'elle est indépendante du mouvement de la source. Cela contredit la conception newtonienne de la mesure et de l'addition des vitesses.

Par ailleurs, plusieurs physiciens, en particulier Poincaré, Lorentz et Einstein, commencent à mettre en doute le caractère absolu de la notion de simultanéité. Bien qu'en partie issues de l'expérience, leurs idées proviennent surtout de réflexions profondes sur la nature du temps, de l'espace, et de la façon de mesurer les distances et les durées. Il est bien connu qu'Einstein était un grand adepte des « expériences de pensées ». Loin des laboratoires, c'est pourtant lui qui trouva l'approche des notions de temps et d'espace qui, aujourd'hui encore, s'avère être la plus pertinente, et qui en particulier rejeta définitivement l'idée d'un temps absolu de référence.

2.2 Les notions fondamentales d'observateur et de référentiel

Il est apparu depuis Galilée et Newton que pour décrire toute expérience ou tout phénomène physique, il fallait faire appel à la notion de référentiel ou d'observateur. Ainsi, dans le domaine de la physique qui nous intéresse ici, dont l'objet est de décrire le mouvement des corps matériels, et dans la description des ondes électromagnétiques, donc en particulier de la lumière, on rapporte tous les phénomènes à un « observateur » (être abstrait !) muni de moyens de « mesurer » des « distances » et des « durées ». Cet observateur rapporte alors ces mesures à un cadre géométrique, un *référentiel*, qui est donc un espace

géométrique dont les points représentent les positions (spatiotemporelles) des objets étudiés, et les courbes, les trajectoires de ces objets.

Le point fondamental qui constitue le passage, l'évolution, de la physique newtonienne à la relativité restreinte, puis à la relativité générale, c'est la modification de la nature de cet espace géométrique.

Ainsi pour Newton, et sans doute depuis l'Antiquité, l'univers se décrivait comme étant un espace euclidien à trois dimensions, le temps et les durées se mesurant sur un autre espace, une droite (espace à une dimension) indépendante. Ainsi la description newtonienne du mouvement se fait dans un espace géométrique qui est un couple formé d'un espace euclidien à trois dimensions et d'une droite indépendante. Un *événement* physique se définit par les données du lieu où il se situe et de la date à laquelle il se produit. Pour repérer les événements dans l'espace, on trace trois droites perpendiculaires entre elles, sur lesquelles on note les *coordonnées* des points ; c'est ce qu'on appelle un *repère*. Le temps se marque sur la droite indépendante.

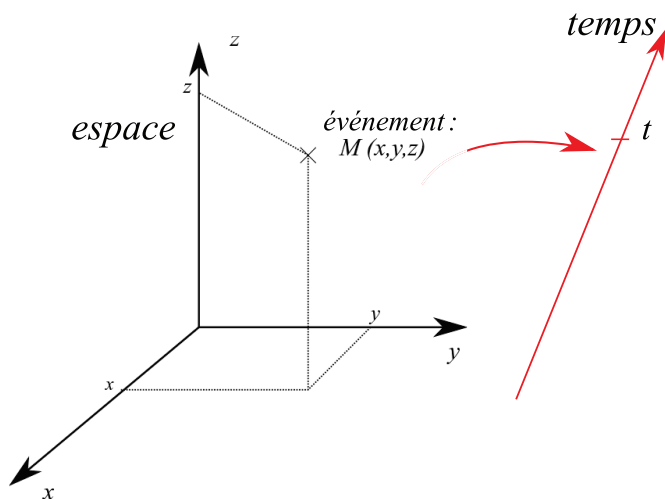


FIGURE 2.1. On associe à un référentiel un repère qui fournit les coordonnées des événements. Chez Newton, il y a un repère pour les positions spatiales et un repère pour les dates.

La première idée géniale d'Einstein a été de comprendre, à partir d'expériences qui mettaient en défaut la description newtonienne (mesure de la vitesse de la lumière dans différents référentiels), qu'une description correcte du mouvement des objets physiques ou des ondes électromagnétiques ne pouvait se faire en séparant l'espace et le temps, mais que les mesures de distance et de durées étaient intimement entremêlées. Il comprit donc, après que Minkowski

Bibliographie

1. Balibar J. *Einstein, Œuvres choisies*. CNRS Editions, 1989.
2. Bourguignon J.P. *A mathematician's visit to Kaluza-Klein theory*. Rend. Sem. Mat. Univ. Poi. Torino, Fascicolo Speciale 1989, P.D.E. and Geometry, 1988.
3. Choquet-Bruhat Y. *General relativity and the Einstein equations*. Oxford Science Publications, 2009.
4. Collion S. *From geodesics deviation to Spacetime singularities*. 2018. **A paraître**.
5. Collion S., Vaugon M. *A New Approach to Kaluza-Klein theory*. arXiv :1709.04172 [gr-qc].
6. Einstein A. *La théorie de la relativité restreinte et générale, 1916*. Dunod, 2012.
7. Gourgoulhon E. *Relativité restreinte*. EDP Sciences/CNRS éditions, 2010.
8. Gourgoulhon E. *Les Tachyons, un aperçu graphique*. 2012, disponible à : <http://relativite.obspm.fr/complements.html>
9. Gourgoulhon E. *Relativité générale*. 2014, disponible à <https://luth.obspm.fr/~luthier/gourgoulhon/fr/master/relatM2.pdf>
10. Gourgoulhon E. *Geometry and physics of black holes*. 2016, disponible à <https://luth.obspm.fr/~luthier/gourgoulhon/bh16/>
11. Gallot S., Hulin D., Lafontaine J. *Riemannian Geometry*. Springer, 2000.
12. Hawking S. *Une brève histoire du temps, du Big Bang aux trous noirs*. Flammarion, Champs sciences, 2017.
13. Hawking S., Ellis G.F.R. *The large scale structure of space-time*. Cambridge University Press, 1973
14. Lachièze-Rey M. *Voyager dans le temps*. Seuil, 2013.
15. Lafontaine J. *Introduction aux variétés différentielles*. EDP Sciences, 2010.
16. Lasota J.P. *La science des trous noirs*. Odile Jacob, 2010.
17. Deruelle N., Lasota J.P. *Les ondes gravitationnelles*. Odile Jacob, 2018.
18. Le Bellac M. *Les relativités : Espace, Temps, Gravitation*. EDP Sciences, 2015.
19. Lee J.M. *Manifolds and differential geometry*. The American Mathematical Society, 2009.

20. Lee J. *Introduction to Smooth manifolds*. Springer, 2010.
21. Lee J. *Introduction to Riemannian manifolds*. Springer, 2010.
22. Misner C.W., Thorne K.S., Wheeler J.A. *Gravitation*. W.H. Freeman and Co Ltd., 1973.
23. O'Neil B. *Semi-Riemannian Geometry*. Academic Press, 1983.
24. Overduin J.M., Wesson P.S. *Kaluza-Klein Gravity*. 1998. arXiv :gr-qc/9805018.
25. Penrose R. *Techniques of Differential Topology in Relativity*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1972.
26. Penrose R. *The road to reality*. Edited by A.A. Knopf, Book Club, 2004.
27. Riazuelo A. *Les trous noirs, à la poursuite de l'invisible*. Vuibert, 2016.
28. Thorne K. *Trous noirs et distorsion du temps*. Flammarion, Champs sciences, 1990.
29. Vaugon M. *Petit manuel de relativité général à l'usage des gens connaissant la géométrie Riemannienne*. 2010.
30. Vaugon M. *A Mathematicians' View of Geometrical Unification of General Relativity and Quantum Physics*. arXiv :1010.1516 [gr-qc].
31. Villani C. *Théorème vivant*. Grasset, 2012.
32. Zee A. *Vertigineuses symétries*. EDP Sciences, 2018.