

Jean-Étienne Rombaldi

# ANALYSE MATRICIELLE

## COURS ET

## EXERCICES RÉSOLUS

2<sup>e</sup> édition

## Jean-Étienne Rombaldi

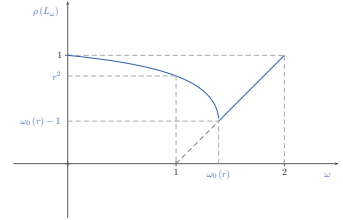
.....

**Cette deuxième édition du livre « Analyse matricielle » est corrigée et augmentée d'un chapitre sur les matrices réelles positives et stochastiques.**

Cet ouvrage est consacré à l'étude de l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  des matrices carrées à coefficients réels ou complexes du point de vue algébrique et topologique, préalable nécessaire à tout cours d'analyse numérique. La synthèse réalisée par l'auteur permet aux étudiants d'approfondir leurs connaissances sur les espaces vectoriels normés et l'algèbre linéaire, des notions de base en algèbre linéaire et en topologie étant suffisantes pour la lecture de ce livre.

Le public visé est celui des candidats à l'agrégation (interne et externe) et également celui des étudiants de licence et maîtrise de mathématiques. Chaque chapitre est suivi d'une série d'exercices corrigés. Les résultats classiques sont illustrés par des exemples qui peuvent trouver leur place dans les leçons d'oral des concours.

*Jean-Étienne Rombaldi est professeur agrégé de mathématiques, son dernier poste étant à l'Institut Fourier de Grenoble (Université Grenoble-Alpes). Il a longtemps été préparateur, à l'université et pour le compte du CNED à l'agrégation interne et externe de mathématiques.*



Jean-Étienne ROMBALDI

# **Analyse matricielle**

## **Cours et exercices résolus**

2<sup>e</sup> édition

**edp sciences**

## Dans la même collection

Éléments d'analyse réelle, 2<sup>e</sup> édition

Jean-Étienne Rombaldi

2019, ISBN : 978-2-7598-2339-0

Thèmes pour l'agrégation de mathématiques, 2<sup>e</sup> édition

Jean-Étienne Rombaldi

2019, ISBN : 978-2-7598-2340-6

*Imprimé en France*

ISBN (papier) : 978-2-7598-2341-3 - ISBN (ebook) : 978-2-7598-2419-9

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés, réservés pour tous pays. La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (alinéa 1<sup>er</sup> de l'article 40). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du code pénal.

© EDP Sciences, 2019

# Table des matières

Avant-propos	v
<b>1 Polynômes minimal et caractéristique. Sous espaces caractéristiques</b>	<b>1</b>
1.1 Définitions et premières propriétés	2
1.2 Localisation des valeurs propres d'une matrice complexe	7
1.3 Matrice compagnon d'un polynôme	10
1.4 Le théorème de Cayley-Hamilton	13
1.5 Méthodes de calcul du polynôme caractéristique d'une matrice complexe	14
1.6 Sous espaces caractéristiques	17
1.7 Exercices	21
<b>2 Réduction des endomorphismes et des matrices</b>	<b>31</b>
2.1 Trigonalisation	31
2.2 Diagonalisation	33
2.3 Espaces vectoriels euclidiens	34
2.4 Réduction des matrices orthogonales	40
2.5 Réduction des matrices symétriques réelles	42
2.6 Tridiagonalisation des matrices symétriques réelles. Méthode de Householder	44
2.7 Espaces vectoriels hermitiens	46
2.8 Réduction des matrices normales	49
2.9 Forme réduite de Jordan	52
2.10 Exercices	56
<b>3 L'espace vectoriel normé <math>\mathcal{M}_n(\mathbb{K})</math> (<math>\mathbb{K} = \mathbb{R}</math> ou <math>\mathbb{C}</math>)</b>	<b>73</b>
3.1 Norme matricielle induite par une norme vectorielle	73
3.2 Le groupe topologique $GL_n(\mathbb{K})$	77
3.3 Propriétés topologiques de l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$	83
3.4 Rayon spectral d'une matrice complexe	86
3.5 Conditionnement d'une matrice	94
3.6 Quotient de Rayleigh-Ritz et Hausdorffien	96
3.7 Conditionnement des problèmes de valeurs propres	99
3.8 Exercices	102

<b>4</b>	<b>Matrices positives et irréductibles</b>	<b>123</b>
4.1	Matrices positives . . . . .	123
4.2	Matrices strictement positives et théorème de Perron-Frobenius . .	128
4.3	Matrices irréductibles . . . . .	134
4.4	Matrices primitives . . . . .	139
4.5	Matrices stochastiques et bistochastiques . . . . .	141
4.6	Exercices . . . . .	154
<b>5</b>	<b>Systèmes linéaires</b>	<b>161</b>
5.1	Position des problèmes et notations . . . . .	161
5.2	Problèmes numériques liés à la résolution des systèmes linéaires . .	162
5.3	Cas des matrices triangulaires . . . . .	164
5.4	Matrices de dilatation et de transvection. Opérations élémentaires	164
5.5	Méthode des pivots de Gauss . . . . .	168
5.6	Résolution des systèmes linéaires à coefficients entiers . . . . .	170
5.7	Décomposition LR ou méthode de Crout . . . . .	171
5.8	Décomposition $LD^tL$ des matrices symétriques réelles . . . . .	174
5.9	Décomposition de Cholesky des matrices symétriques réelles définies positives . . . . .	175
5.10	Méthode d'élimination de Gauss-Jordan . . . . .	176
5.11	Méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires . . . . .	177
5.12	Méthode de Jacobi . . . . .	178
5.13	Méthode de Gauss-Seidel . . . . .	179
5.14	Méthode de relaxation . . . . .	181
5.15	Méthodes de descente et de gradient . . . . .	188
5.16	Exercices . . . . .	196
<b>6</b>	<b>Calcul approché des valeurs et vecteurs propres</b>	<b>209</b>
6.1	Introduction . . . . .	209
6.2	Méthode de la puissance itérée . . . . .	209
6.3	Méthode de Jacobi pour les matrices symétriques . . . . .	213
6.4	La méthode de Givens et Householder . . . . .	218
6.5	Exercices . . . . .	223
<b>7</b>	<b>Systèmes différentiels linéaires et exponentielle d'une matrice</b>	<b>229</b>
7.1	Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants . . . . .	229
7.2	L'exponentielle d'une matrice . . . . .	233
7.3	Un algorithme de calcul de l'exponentielle d'une matrice . . . . .	239
7.4	Equations différentielles linéaires d'ordre $n$ à coefficients constants	240
7.5	Systèmes différentiels linéaires à coefficients non constants . . . . .	242
7.6	Méthode de variation des constantes . . . . .	245
7.7	Surjectivité et injectivité de l'exponentielle matricielle . . . . .	247
7.8	Exercices . . . . .	251

# Avant-propos

Cet ouvrage, qui pourrait s'intituler « Matrices réelles et complexes, propriétés algébriques et topologiques, applications » est consacré à l'étude de l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients réels ou complexes du point de vue algébrique et topologique. Cette étude est un préalable important à tout bon cours d'analyse numérique.

Des connaissances de base en algèbre linéaire et en topologie sont amplement suffisantes pour la lecture de cet ouvrage.

Le public visé est celui des étudiants du deuxième cycle universitaire et des candidats à l'Agrégation externe et interne de Mathématiques.

La synthèse proposée est un bon moyen de réviser ses connaissances sur les espaces vectoriels normés et l'algèbre linéaire. Les candidats à l'agrégation trouveront tout au long de cet ouvrage de nombreux exemples d'applications des résultats classiques souvent proposés dans les leçons d'oral. Par exemple, si dans une leçon sur le groupe orthogonal on pense à mentionner la compacité de  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  il faut avoir réfléchi à quelques exemples d'applications de ce résultat. En suivant cette idée, je me suis efforcé de faire suivre chaque résultat classique et important d'un certain nombre d'applications.

Chaque chapitre est suivi d'une liste d'exercices corrigés. Une bonne utilisation de ces exercices consiste bien évidemment à les chercher au préalable, puis à confronter les résultats obtenus aux solutions proposées.

L'étude des propriétés topologiques de l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et l'application aux méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires et de recherche des valeurs et vecteurs propres utilisent quelques résultats de base sur les espaces vectoriels normés de dimension finie. On pourra se reporter à [18] pour l'étude des espaces vectoriels normés. En particulier, le théorème du point fixe de Banach est utilisé dans l'étude des systèmes différentiels linéaires.

Les chapitres 1 et 2 sont consacrés à l'étude des valeurs et vecteurs propres des matrices réelles ou complexes. Les résultats importants sont le théorème de décomposition des noyaux et les divers théorèmes de réduction à la forme triangulaire ou diagonale.

C'est au chapitre 3 qu'on aborde l'étude des propriétés topologiques de l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On y introduit les notions de norme matricielle induite par une norme vectorielle et on démontre quelques résultats classiques de densité et de connexité.

Pour ce qui est des applications de ce chapitre, je me suis limité à l'analyse numérique linéaire. Pour une application aux groupes de Lie, le lecteur intéressé pourra consulter l'ouvrage de Mnéimné et Testard [12].

Le chapitre 4, qui n'était pas présent dans la première édition, est consacré à l'étude des matrices à coefficients positifs ou strictement positifs avec pour application une étude des matrices stochastiques et doublement stochastiques qui interviennent en théorie des probabilités.

Les chapitres 5 et 6 sont deux chapitres importants de l'analyse numérique linéaire. On s'intéresse aux méthodes directes et itératives de résolution des systèmes linéaires et aux méthodes de calcul approché des valeurs et vecteurs propres d'une matrice carrée réelle ou complexe.

Enfin le chapitre 7 est une application à l'étude des systèmes différentiels linéaires à coefficients constants ou non et à l'exponentielle d'une matrice. L'exponentielle d'une matrice  $y$  est définie à partir de l'étude des systèmes différentiels linéaires à coefficients constants.

Cette deuxième édition diffère de la première par la suppression du premier chapitre sur les espaces vectoriels normés et l'ajout d'un chapitre sur les matrices réelles positives. On renvoie à [18], publié chez le même éditeur, pour les résultats sur les espaces vectoriels normés utilisés dans cet ouvrage.

Je tiens à remercier les éditions EDP Sciences pour la confiance qu'ils m'accordent en publiant une deuxième édition de ce travail.



---

## Chapitre 1

# Polynômes minimal et caractéristique. Sous espaces caractéristiques

---

Pour ce chapitre,  $\mathbb{K}$  est un corps commutatif et  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \geq 1$ .

Pour toute partie non vide  $X$  de  $E$  on désigne par  $\text{Vect}(X)$  le sous espace vectoriel de  $E$  engendré par  $X$ , soit l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires (finies) d'éléments de  $X$ .

On note  $\mathcal{L}(E)$  l'algèbre des endomorphismes de  $E$ ,  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  l'algèbre des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$  et  $GL_n(\mathbb{K})$  le groupe multiplicatif des éléments inversibles de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

On note  $Id$  [resp.  $I_n$ ] l'endomorphisme [resp. la matrice] identité.

Pour tous  $i, j$  compris entre 1 et  $n$ , on note  $E_{ij}$  la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indice  $(i, j)$  qui vaut 1. La famille  $(E_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$  est la une base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Le choix d'une base  $\mathcal{B} = (e_k)_{1 \leq k \leq n}$  de  $E$  permet de réaliser un isomorphisme d'algèbres de  $\mathcal{L}(E)$  sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Cet isomorphisme est réalisé de la façon suivante : à tout endomorphisme  $u$  de  $E$ , on associe sa matrice  $A = ((a_{ij}))_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  dans la base  $\mathcal{B}$  définie par :

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, u(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$$

À toute matrice  $A$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est associé l'endomorphisme de  $\mathbb{K}^n$ , que nous noterons encore  $A$  :

$$\begin{aligned} A : \quad \mathbb{K}^n &\rightarrow \mathbb{K}^n \\ x = (x_i)_{1 \leq i \leq n} &\mapsto Ax = \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right)_{1 \leq i \leq n} \end{aligned}$$

On désigne par  $\mathbb{K}[X]$  l'anneau des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$  et par  $\mathbb{K}(X)$  son corps des fractions rationnelles.

Un polynôme non nul est dit unitaire si son coefficient dominant est égal à 1.

On rappelle que  $\mathbb{K}[X]$  est un anneau euclidien, donc principal et factoriel. Un résultat qui nous sera utile est le théorème de Bézout qui nous dit que deux polynômes  $A$  et  $B$  sont premiers entre eux dans  $\mathbb{K}[X]$  si, et seulement si, il existe deux polynômes  $U$  et  $V$  dans  $\mathbb{K}[X]$  tels que  $AU + BV = 1$ .

Pour tout endomorphisme  $u$  de  $E$ , on note  $u^0 = Id$  et on définit les puissances successives de  $u$  par la relation de récurrence  $u^{k+1} = u^k u$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , ce qui

nous permet de définir, pour tout polynôme  $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ , l'endomorphisme

$P(u) = \sum_{k=0}^p a_k u^k$ . La sous algèbre de  $\mathcal{L}(E)$  engendrée par  $u$  est constituée

des endomorphismes  $v = P(u)$  où  $P$  est dans  $\mathbb{K}[X]$ . On note naturellement  $\mathbb{K}[u]$  cette algèbre et il est facile de vérifier qu'elle est commutative. Précisément on a :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2, (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$$

On définit de manière analogue la sous algèbre  $\mathbb{K}[A]$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  engendrée par une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Si  $A$  est la matrice de  $u$  dans une base  $\mathcal{B}$  de  $E$ , la matrice de  $P(u)$  dans  $\mathcal{B}$  est alors  $P(A)$ .

## 1.1 Définitions et premières propriétés

L'espace vectoriel  $\mathcal{L}(E)$  étant de dimension  $n^2$ , on en déduit que pour tout endomorphisme  $u$  de  $E$  la famille  $(u^k)_{0 \leq k \leq n^2}$  est liée, ce qui se traduit en disant qu'il existe un polynôme  $P$  non nul dans  $\mathbb{K}[X]$  tel que  $P(u) = 0$ . Il en résulte que l'ensemble  $I_u = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u) = 0\}$  n'est pas réduit au polynôme nul. Cet ensemble qui est le noyau du morphisme d'algèbres  $P \mapsto P(u)$ , est un idéal de  $\mathbb{K}[X]$ . L'anneau  $\mathbb{K}[X]$  étant principal on peut donner la définition suivante.

**Définition 1.1.** Pour tout endomorphisme  $u$  de  $E$ , on appelle idéal annulateur de  $u$  l'idéal  $I_u$  et polynôme minimal de  $u$  le générateur unitaire de cet idéal. On note  $\pi_u$  ce polynôme.

On a donc  $I_u = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u) = 0\} = \mathbb{K}[X]\pi_u$  et  $\pi_u$  est le polynôme unitaire de plus petit degré annihilant  $u$ .

On définit de manière analogue le polynôme minimal d'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Si  $u \in \mathcal{L}(E)$  a pour matrice  $A$  dans une base de  $E$ , il a alors le même polynôme minimal que  $A$ .

**Définition 1.2.** Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$ . On dit que  $\lambda$  dans  $\mathbb{K}$  est une valeur propre de  $u$  s'il existe un vecteur non nul  $x$  dans  $E$  tel que  $u(x) = \lambda x$ . On dit alors que  $x$  est un vecteur propre de  $u$  associé à la valeur propre  $\lambda$  et que le sous espace vectoriel de  $E_\lambda = \ker(u - \lambda Id)$  de  $E$  est le sous espace propre associé à  $\lambda$ . L'ensemble des valeurs propres de  $u$  est appelé le spectre de  $u$  et noté  $\text{Sp}(u)$ .

**Définition 1.3.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On dit que  $\lambda$  dans  $\mathbb{K}$  est valeur propre de  $A$  s'il existe un vecteur non nul  $x$  dans  $\mathbb{K}^n$  tel que  $Ax = \lambda x$ . On dit alors que  $x$  est un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$  et que le sous espace vectoriel  $E_\lambda = \ker(A - \lambda I_n)$  de  $\mathbb{K}^n$  est le sous espace propre associé à  $\lambda$ . L'ensemble des valeurs propres de  $A$  est appelé le spectre de  $A$  et noté  $\text{Sp}(A)$ .

Si  $u \in \mathcal{L}(E)$  a pour matrice  $A$  dans une base de  $E$ , un scalaire  $\lambda \in \mathbb{K}$  est valeur propre de  $u$  si, et seulement si, il est valeur propre de  $A$ .

Pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on a les équivalences :

$$\begin{aligned} (\lambda \in \text{Sp}(A)) &\Leftrightarrow (\ker(A - \lambda I_n) \neq \{0\}) \Leftrightarrow (A - \lambda I_n \notin GL_n(\mathbb{K})) \\ &\Leftrightarrow (\det(A - \lambda I_n) = 0) \end{aligned}$$

La matrice  $XI_n - A$  étant un élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X]) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{K}(X))$ , on peut considérer son déterminant  $\chi_A(X) = \det(A - XI_n)$  qui est un élément de  $\mathbb{K}[X]$ . Ce déterminant est le polynôme caractéristique de la matrice  $A$ . C'est un polynôme unitaire de degré  $n$ .

Une matrice et sa transposée ayant même déterminant, on en déduit qu'elles ont le même polynôme caractéristique.

Pour toute matrice  $P \in GL_n(\mathbb{K})$ , les matrices  $A - XI_n$  et  $P^{-1}AP - XI_n = P^{-1}(A - XI_n)P$  sont semblables dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}(X))$ , donc  $\chi_A = \chi_{P^{-1}AP}$ . On peut donc définir le polynôme caractéristique d'un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  par  $\chi_u(X) = \chi_A(X)$ , où  $A$  est la matrice de  $u$  dans une quelconque base de  $E$ . On peut noter  $\chi_u(X) = \det(u - XId)$ .

Avec ces notations, le spectre de  $u$  [resp. de  $A$ ] est l'ensemble des racines de son polynôme caractéristique. C'est donc une partie finie de  $\mathbb{K}$  ayant au plus  $n$  éléments. Ce spectre peut être vide (par exemple pour  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ) ou pas (par exemple pour  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  d'après le théorème de d'Alembert-Gauss).

On rappelle que la trace d'une matrice  $A = ((a_{ij}))_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est  $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ . Pour  $A, B$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on a :

$$\begin{aligned} \text{Tr}(AB) &= \sum_{k=1}^n (AB)_{kk} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ik} b_{k,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{k,i} a_{ik} \\ &= \sum_{i=1}^n (BA)_{ii} = \text{Tr}(BA) \end{aligned}$$

Il en résulte que deux matrices semblables ont même trace. En effet si  $B = P^{-1}AP$  avec  $P \in GL_n(\mathbb{K})$ , on a alors :

$$\text{Tr}(B) = \text{Tr}(P^{-1}(AP)) = \text{Tr}((AP)P^{-1}) = \text{Tr}(A)$$

On peut donc définir la trace de  $u \in \mathcal{L}(E)$  comme la trace de sa matrice dans n'importe quelle base de  $E$ .

**Théorème 1.1.**

Si  $A = ((a_{ij}))_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  admet  $n$  valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  distinctes ou confondues dans  $\mathbb{K}$ , on a alors :

$$\det(A) = \prod_{k=1}^n \lambda_k \text{ et } \text{Tr}(A) = \sum_{k=1}^n \lambda_k$$

**Preuve.** Le développement du déterminant dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}(X))$  nous donne :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X - a_{11} & \cdots & -a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n,1} & \cdots & X - a_{n,n} \end{vmatrix} = X^n - \text{Tr}(A) X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)$$

et dans le cas où  $\chi_A$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ , on a aussi :

$$\chi_A(X) = \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k) = X^n - \left( \sum_{k=1}^n \lambda_k \right) X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \prod_{k=1}^n \lambda_k$$

ce qui nous donne, par identification des coefficients de  $X^{n-1}$  et des coefficients constants, les égalités  $\text{Tr}(A) = \sum_{k=1}^n \lambda_k$  et  $\det(A) = \prod_{k=1}^n \lambda_k$ .  $\square$

**Théorème 1.2.**

Soient  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $P \in \mathbb{K}[X]$ . Pour toute valeur propre  $\lambda \in \text{Sp}(u)$ ,  $P(\lambda)$  est valeur propre de  $P(u)$ . Pour  $\mathbb{K}$  algébriquement clos, on a  $\text{Sp}(P(u)) = \{P(\lambda) \mid \lambda \in \text{Sp}(u)\}$ .

**Preuve.** Si  $\lambda \in \mathbb{K}$  est une valeur propre de  $u$  et  $x \in E \setminus \{0\}$  un vecteur propre associé, on vérifie alors facilement que pour tout polynôme  $P \in \mathbb{K}[X]$ , on a  $P(u)x = P(\lambda)x$ . En effet, de  $u(x) = \lambda x$ , on déduit par récurrence sur  $k \geq 0$  que  $u^k(x) = \lambda^k x$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , puis par linéarité, il en résulte que  $P(u)x = P(\lambda)x$  pour tout  $P \in \mathbb{K}[X]$ . Ce qui signifie que  $x$  est un vecteur propre de  $P(u)$  associé à la valeur propre  $P(\lambda)$ .

Si  $P(X) = a_0$  est un polynôme constant,  $P(u) = a_0 Id$  a alors pour unique valeur propre  $a_0$ , l'espace propre associé étant  $E$ .

On suppose que  $\mathbb{K}$  est algébriquement clos et que  $P$  est non constant ( $\text{Sp}(u)$  et  $\text{Sp}(P(u))$  sont donc non vides). On a vu que  $\{P(\lambda) \mid \lambda \in \text{Sp}(u)\} \subset \text{Sp}(P(u))$ . Si  $\mu \in \text{Sp}(P(u))$ , en notant  $Q(X) = P(X) - \mu$ , l'endomorphisme  $Q(u)$  est non

injectif et en écrivant que  $Q(X) = \alpha \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{m_i}$  ( $\mathbb{K}$  est algébriquement clos),

on en déduit qu'il existe un indice  $i$  tel que l'endomorphisme  $u - \lambda_i Id$  soit non injectif ce qui signifie que  $\lambda_i$  est une valeur propre de  $u$ , puis de  $Q(\lambda_i) = 0$ , on déduit que  $\mu = P(\lambda_i)$ . En définitive on a  $\text{Sp}(P(u)) = \{P(\lambda) \mid \lambda \in \text{Sp}(u)\}$ .  $\square$

Pour  $\mathbb{K}$  non algébriquement clos, l'inclusion  $\{P(\lambda) \mid \lambda \in \text{Sp}(u)\} \subset \text{Sp}(P(u))$  peut être stricte. Par exemple pour  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et  $P(X) = X^2$ , on a  $A^2 = -I_2$  et  $\text{Sp}(A) = \emptyset$ , donc l'inclusion est stricte.

**Lemme 1.1** *Soit  $u$  un endomorphisme non nul de  $E$ . Si  $F$  est un sous espace vectoriel de  $E$  stable par  $u$ , le polynôme caractéristique de la restriction de  $u$  à  $F$  divise alors celui de  $u$ .*

**Preuve.** Soit  $\mathcal{B}_1$  une base de  $F$  complétée en une base  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$  de  $E$ . Dans cette base la matrice de  $u$  est  $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$  où  $A_1$  est la matrice, dans la base  $\mathcal{B}_1$ , de la restriction de  $u$  à  $F$  ( $F$  est stable par  $u$ ) et le polynôme caractéristique de  $u$  s'écrit  $\chi_u(X) = \det(A_1 - XI_{n_1}) \det(A_3 - XI_{n_3})$ . Il en résulte que  $\chi_u$  est un multiple du polynôme caractéristique de la restriction de  $u$  à  $F$ .  $\square$

**Théorème 1.3.**

*Soient  $u$  un endomorphisme de  $E$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$  une valeur propre de  $u$ . Si  $\lambda$  a pour multiplicité  $\alpha$  en tant que racine du polynôme caractéristique de  $u$ , on a alors  $1 \leq \dim(\ker(u - \lambda Id)) \leq \alpha$ .*

**Preuve.** Pour  $\lambda \in \text{Sp}(u)$ , le sous-espace vectoriel  $E_\lambda = \ker(u - \lambda Id)$  n'est pas réduit au vecteur nul et sa dimension est supérieure ou égale à 1. Ce sous-espace vectoriel étant stable par  $u$ , le polynôme caractéristique  $\chi_\lambda$  de la restriction de  $u$  à  $E_\lambda$  divise le polynôme caractéristique  $\chi_u$  de  $u$  (lemme 1.1). En remarquant que  $\chi_\lambda(X) = (\lambda - X)^\delta$  où  $\delta$  est la dimension de  $E_\lambda$ , on en déduit que  $\chi_u(X) = (\lambda - X)^\delta Q(X)$  et la racine  $\lambda$  de  $\chi_u$  étant de multiplicité  $\alpha$ , on a nécessairement  $\delta \leq \alpha$ .  $\square$

**Théorème 1.4.**

*Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$ . Les valeurs propres de  $u$  sont les racines de son polynôme minimal.*

**Preuve.** Si  $\lambda \in \mathbb{K}$  est une valeur propre de  $u$  et  $x$  un vecteur propre (non nul) associé, de l'égalité  $0 = \pi_u(u)(x) = \pi_u(\lambda)x$  avec  $x \neq 0$ , on déduit que  $\pi_u(\lambda) = 0$ , c'est-à-dire que  $\lambda$  est racine de  $\pi_u$ . Réciproquement si  $\lambda$  est racine de  $\pi_u$ , on a alors  $\pi_u(X) = (X - \lambda)Q(X)$  et avec  $\pi_u(u) = (u - \lambda Id) \circ Q(u) = 0$  et du caractère minimal de  $\pi_u$  on déduit que  $u - \lambda Id$  est non inversible, ce qui équivaut à dire que  $\lambda$  est une valeur propre de  $u$ .  $\square$

**Définition 1.4.** *Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$ . La multiplicité d'une valeur propre de  $u$  en tant que racine de son polynôme minimal est appelée l'indice de cette valeur propre.*

**Définition 1.5.** On dit qu'un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  [resp. une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ] est nilpotent [resp. nilpotente] s'il existe un entier  $r$  strictement positif tel que  $u^{r-1} \neq 0$  et  $u^r = 0$ . [resp.  $A^{r-1} \neq 0$  et  $A^r = 0$ ]. On dit que  $r$  est l'ordre de nilpotence de  $u$  [resp. de  $A$ ].

Il est facile de vérifier que 0 est la seule valeur propre d'un endomorphisme nilpotent.

**Lemme 1.2** Si  $u \in \mathcal{L}(E)$  est nilpotent, on a alors  $\text{Tr}(u^k) = 0$  pour tout  $k$  compris entre 1 et  $n$ . Pour  $\mathbb{K}$  de caractéristique nulle, un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est nilpotent si, et seulement si,  $\text{Tr}(u^k) = 0$  pour tout  $k$  compris entre 1 et  $n$ .

**Preuve.**

1. On vérifie tout d'abord par récurrence sur la dimension  $n \geq 1$  de  $E$ , qu'un endomorphisme nilpotent est de trace nulle. Pour  $n = 1$ , l'unique endomorphisme nilpotent est l'endomorphisme nul et sa trace est nulle. Supposons le résultat acquis pour les espaces vectoriels de dimension au plus égale à  $n - 1 \geq 1$  et soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  nilpotent d'ordre  $r \geq 1$  avec  $E$  de dimension  $n \geq 2$ . Comme 0 est valeur propre de  $u$  ( $u^{r-1} \neq 0$ , donc il existe  $y \in E$  tel que  $x = u^{r-1}(y) \neq 0$  et on a  $u(x) = u^r(y) = 0$ ), il existe un vecteur non nul  $e_1$  dans le noyau de  $u$  et complétant ce vecteur en une base  $\mathcal{B}_1$  de  $E$ , la matrice de  $u$  dans  $\mathcal{B}_1$  est de la forme  $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & B \end{pmatrix}$  où  $\alpha \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ . Avec  $A^r = \begin{pmatrix} 0 & \alpha B^{r-1} \\ 0 & B^r \end{pmatrix} = 0$ , on déduit que  $B$  est nilpotente et en conséquence  $\text{Tr}(B) = 0$  (l'hypothèse de récurrence nous donne le résultat sur  $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ ), ce qui entraîne que  $\text{Tr}(u) = \text{Tr}(A) = \text{Tr}(B) = 0$ .

2. Si  $u \in \mathcal{L}(E)$  est nilpotent, il en est alors de même de  $u^k$  pour tout entier  $k \geq 1$  et en conséquence,  $\text{Tr}(u^k) = 0$ .

3. Pour la réciproque avec  $\mathbb{K}$  de caractéristique nulle, on procède encore par récurrence sur la dimension  $n \geq 1$  de  $E$ . Pour  $n = 1$ , on a  $u(x) = \lambda x$ ,  $\text{Tr}(u) = \lambda$  et le résultat est trivial. Supposons le résultat acquis pour les espaces vectoriels de dimension au plus égale à  $n - 1 \geq 1$  et soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $\text{Tr}(u^k) = 0$  pour tout  $k$  compris entre 1 et  $n = \dim(E) \geq 2$ . En désignant par  $\chi_u(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$

le polynôme caractéristique de  $u$  et en tenant compte de  $\chi_u(u) = \sum_{k=0}^n a_k u^k = 0$

et  $\text{Tr}(u^k) = 0$  pour  $k = 1, \dots, n$ , on déduit que  $\text{Tr}(\chi_u(u)) = na_0 = 0$  et  $a_0 = \det(u) = 0$  puisque  $\mathbb{K}$  de caractéristique nulle. Donc 0 est valeur propre de  $u$  et il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$ , dans laquelle la matrice de  $u$  est

de la forme  $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & B \end{pmatrix}$  où  $\alpha \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ . Avec

$A^k = \begin{pmatrix} 0 & \alpha B^{k-1} \\ 0 & B^k \end{pmatrix}$ , on déduit que  $\text{Tr}(B^k) = \text{Tr}(A^k) = \text{Tr}(u^k) = 0$  pour tout  $k = 1, \dots, n$  et l'hypothèse de récurrence nous dit que  $B$  est nilpotente.

Enfin, en notant  $p$  l'indice de nilpotence de  $B$ , avec  $A^{p+1} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha B^p \\ 0 & B^{p+1} \end{pmatrix} = 0$ , on déduit que  $A$  est nilpotente et il en est de même de  $u$ .

On peut aussi procéder comme suit en écrivant le polynôme minimal de  $u$  sous la forme  $\pi_u(X) = X^r Q(X)$  avec  $Q(0) \neq 0$ . Le théorème de décomposition des noyaux (théorème 1.11) nous dit que  $E = F \oplus G$ , où les espaces  $F = \ker(u^r)$  et  $G = \ker(Q(u))$  sont stables par  $u$  (commutativité de  $\mathbb{K}[u]$ ). Si  $Q$  est non

constant, il s'écrit alors  $Q(X) = X^{p-r} + \sum_{k=0}^{p-r-1} a_k X^k$  avec  $0 \leq r \leq p-1$  et on a

$$0 = Q(u)|_G = Q(u|_G), \text{ donc } \text{Tr}(Q(u|_G)) = \text{Tr}(u|_G^{p-r}) + \sum_{k=0}^{p-r-1} a_k \text{Tr}(u|_G^k) = 0$$

et  $\text{Tr}(u|_G^{p-r}) + \sum_{k=1}^{p-r-1} a_k \text{Tr}(u|_G^k) = -a_0 \dim(G) \neq 0$  (on est en caractéristique nulle et  $a_0 = Q(0)$ ). Il existe donc un entier  $k$  compris entre 1 et  $p-r \leq n$  tel que  $\text{Tr}(u|_G^k) \neq 0$ . Utilisant la matrice de  $u^k$  dans une base adaptée à la somme directe  $E = F \oplus G$ ,  $F$  et  $G$  étant stables par  $u^k$ , on aboutit à  $\text{Tr}(u^k) = \text{Tr}(u|_F^k) + \text{Tr}(u|_G^k) = \text{Tr}(u|_G^k) \neq 0$ , ce qui n'est pas. Le polynôme  $Q$  est donc constant égal à 1, ce qui nous donne  $\pi_u(X) = X^r$  et signifie que  $u$  est nilpotent d'ordre  $r$ .

□

## 1.2 Localisation des valeurs propres d'une matrice complexe

Pour ce paragraphe,  $\mathbb{K}$  désigne le corps des nombres complexes et l'espace vectoriel  $\mathbb{C}^n$  est muni de la norme  $x \mapsto \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ .

Pour  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $R \in \mathbb{R}^+$ , on note  $\overline{D}(\lambda, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \lambda| \leq R\}$  le disque fermé de centre  $\lambda$  et de rayon  $R$  dans le plan complexe.

Pour  $n \geq 2$ ,  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et  $i, j$  compris entre 1 et  $n$ , on note :

$$L_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad C_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}|, \quad L = \max_{1 \leq i \leq n} (L_i + |a_{ii}|), \quad C = \max_{1 \leq j \leq n} (C_j + |a_{jj}|)$$

### Théorème 1.5. Gerschörin-Hadamard

Pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , on a  $\text{Sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^n \overline{D}(a_{ii}, L_i)$ .

**Preuve.** Soient  $\lambda \in \text{Sp}(A)$  et  $x \in \mathbb{C}^n$  un vecteur propre associé tel que  $\|x\|_\infty = 1$ . Pour  $i \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $|x_i| = \|x\|_\infty$ , on a :

$$|\lambda - a_{ii}| = |(\lambda - a_{ii})x_i| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}x_j \right| \leq \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \right) \|x\|_\infty = L_i$$

soit  $\lambda \in \overline{D}(a_{ii}, L_i)$ . □

On a aussi l'inclusion  $\text{Sp}(A) = \text{Sp}({}^t A) \subset \bigcup_{j=1}^n \overline{D}(a_{jj}, C_j)$ .

Les disques fermés  $\overline{D}(a_{ii}, L_i)$  sont les disques de Gerschgorin.

L'exercice 1.9 est une application du théorème de Gerschgorin-Hadamard au calcul des valeurs propres d'une matrice.

**Corollaire 1.1** : Pour toute valeur propre  $\lambda \in \mathbb{C}$  de  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  on a  $|\lambda| \leq \min(L, C)$ .

**Preuve.** Pour  $\lambda \in \text{Sp}(A)$  et  $i \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $|\lambda - a_{ii}| \leq L_i$ , on a :

$$|\lambda| \leq |\lambda - a_{ii}| + |a_{ii}| \leq L_i + |a_{ii}| \leq L$$

Remplaçant  $A$  par sa transposées, on a aussi  $|\lambda| \leq C$ , donc  $|\lambda| \leq \min(L, C)$ . □

**Définition 1.6.** Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est dite à diagonale strictement dominante si :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, |a_{ii}| > L_i$$

Les matrices à diagonale strictement dominante se rencontrent dans de nombreux problèmes, par exemple dans le problème de l'interpolation par des fonctions splines cubiques ou dans les problèmes de résolutions d'équations aux dérivées partielles par des méthodes de discrétisation par différences finies (voir [17]).

**Corollaire 1.2** : Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  à diagonale strictement dominante est inversible.

**Preuve.** Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,  $\lambda \in \text{Sp}(A)$  et  $i$  compris entre 1 et  $n$  tel que  $|\lambda - a_{ii}| \leq L_i$ . Dans le cas où  $A$  est à diagonale strictement dominante, on ne peut avoir  $\lambda = 0$ . On a donc  $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{C}^*$ , ce qui implique que  $A$  est inversible. □

Une généralisation du théorème de Gerschgorin et Hadamard est le théorème d'Ostrowski qui suit.

**Lemme 1.3** Soit  $A$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . S'il existe un réel  $\alpha \in [0, 1]$  tel que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, |a_{ii}| > L_i^\alpha C_i^{1-\alpha}$$

la matrice  $A$  est alors inversible.



**Preuve.** Pour  $\alpha = 1$ , il s'agit du corollaire 1.2 et pour  $\alpha = 0$ , c'est encore le corollaire 1.2 appliqué à  ${}^t A$ .

On suppose que  $\alpha \in ]0, 1[$  et que  $A$  est non inversible, ce qui revient à dire que 0 est valeur propre de  $A$ . Si  $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  est un vecteur propre non nul associé, il est alors solution non nulle du système linéaire :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = 0 \quad (1 \leq i \leq n)$$

et on a :

$$|a_{ii}| |x_i| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| |x_j| \quad (1 \leq i \leq n)$$

Tenant compte de  $L_i^\alpha C_i^{1-\alpha} < |a_{ii}|$ , pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on en déduit que :

$$L_i^\alpha C_i^{1-\alpha} |x_i| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| |x_j| \quad (1 \leq i \leq n)$$

l'inégalité étant stricte pour tous les indices  $i$  tels que  $x_i \neq 0$ . Utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient pour  $1 \leq i \leq n$  :

$$\begin{aligned} L_i^\alpha C_i^{1-\alpha} |x_i| &\leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|^\alpha \left( |a_{ij}|^{1-\alpha} |x_j| \right) \\ &\leq \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \right)^\alpha \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| |x_j|^{\frac{1}{1-\alpha}} \right)^{1-\alpha} = L_i^\alpha \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| |x_j|^{\frac{1}{1-\alpha}} \right)^{1-\alpha} \end{aligned}$$

Pour  $x_i \neq 0$ , l'inégalité est stricte et nécessairement  $L_i > 0$ . On en déduit donc que :

$$C_i |x_i|^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| |x_j|^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (1 \leq i \leq n)$$

l'inégalité étant stricte pour  $x_i \neq 0$  et évidente pour  $x_i = 0$ . En additionnant ces inégalités, on aboutit à :

$$S = \sum_{i=1}^n C_i |x_i|^{\frac{1}{1-\alpha}} < \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| |x_j|^{\frac{1}{1-\alpha}} = \sum_{j=1}^n C_j |x_j|^{\frac{1}{1-\alpha}} = S$$

ce qui est impossible. La matrice  $A$  est donc nécessairement inversible.  $\square$

**Théorème 1.6. Ostrowski**

Pour tout réel  $\alpha \in [0, 1]$  et toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , on a :

$$\text{Sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^n \overline{D}(a_{ii}, L_i^\alpha C_i^{1-\alpha})$$

**Preuve.** Pour  $\lambda \in \text{Sp}(A)$ , la matrice  $A - \lambda I_n$  est non inversible et le lemme précédent nous dit que pour tout réel  $\alpha \in [0, 1]$ , il existe un indice  $i \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $|a_{ii} - \lambda| \leq L_i^\alpha C_i^{1-\alpha}$ .  $\square$

**Corollaire 1.3 :** Pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et  $\lambda \in \text{Sp}(A)$ , il existe  $i \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $|\lambda|^2 \leq (L_i + |a_{ii}|)(C_i + |a_{ii}|)$ .

**Preuve.** Prenant  $\alpha = \frac{1}{2}$  dans le théorème d'Ostrowski, on peut trouver  $i$  compris entre 1 et  $n$  tel que  $|a_{ii} - \lambda| \leq \sqrt{L_i C_i}$ , ce qui implique que :

$$|\lambda| \leq |a_{ii}| + \sqrt{L_i C_i} \leq \sqrt{(|a_{ii}| + L_i)(|a_{ii}| + C_i)}$$

la dernière inégalité résultant de  $2\sqrt{L_i C_i} \leq C_i + L_i$ .  $\square$

### 1.3 Matrice compagnon d'un polynôme

$\mathbb{K}$  est à nouveau un corps commutatif.

À tout polynôme unitaire  $P(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$  de degré  $n \geq 1$  dans  $\mathbb{K}[X]$ , on associe sa matrice compagnon  $C_P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  définie par :

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & a_1 \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Pour  $n = 1$ , on a  $P(X) = X - a_0$  et  $C_P = (a_0)$ .

Une telle matrice est aussi appelée matrice de Frobenius.

Pour ce paragraphe, on se fixe  $P \in \mathbb{K}[X]$  unitaire de degré  $n \geq 1$  et  $u_P$  est l'endomorphisme de  $\mathbb{K}^n$  de matrice  $C_P$  dans la base canonique  $\mathcal{B} = (e_k)_{1 \leq k \leq n}$ .

On a donc  $u_P(e_{k-1}) = e_k$  pour  $k$  compris entre 2 et  $n$  et  $u_P(e_n) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k e_{k+1}$ . Il en résulte que  $e_k = u_P^{k-1}(e_1)$  pour  $k$  compris entre 1 et  $n$ .

**Lemme 1.4** Pour tout polynôme  $Q \in \mathbb{K}[X]$ , on a  $Q(u_P) = 0$  si, et seulement si,  $Q(u_P)(e_1) = 0$ .

**Preuve.** Si  $Q(u_P) = 0$ , on a alors en particulier  $Q(u)(e_1) = 0$ . Réciproquement, si  $Q(u_P)(e_1) = 0$ , on a alors pour tout  $k$  compris entre 2 et  $n$  :

$$Q(u_P)(e_k) = Q(u_P)(u_P^{k-1}(e_1)) = u_P^{k-1}(Q(u_P)(e_1)) = 0$$

donc  $Q(u) = 0$ . □

### Théorème 1.7.

*Un polynôme unitaire  $P$  est polynôme minimal et polynôme caractéristique de sa matrice compagnon  $C_P$ .*

**Preuve.** L'égalité  $u_P(e_n) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k e_{k+1}$  se traduit par  $u_P^n(e_1) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u_P^k(e_1)$ , soit  $P(u_P)(e_1) = 0$ , ce qui équivaut à  $P(u_P) = 0$  d'après le lemme précédent. Le polynôme minimal  $\pi_{u_P}$  divise donc  $P$  et  $\deg(\pi_{u_P}) \leq n$ . La famille de vecteurs  $(e_k)_{1 \leq k \leq n} = (u_P^{k-1}(e_1))_{1 \leq k \leq n}$  étant libre, il n'existe pas de polynôme  $Q \in \mathbb{K}_{n-1}[X] \setminus \{0\}$  tel que  $Q(u_P) = 0$ , donc  $\deg(\pi_{u_P}) \geq n$ . Le polynôme minimal  $\pi_{u_P}$  est donc de degré  $n$  et égal à  $P$  puisque unitaire divisant  $P$ . On a donc  $\pi_{C_P} = \pi_{u_P} = P$ .

Le calcul du polynôme caractéristique  $\chi_{C_P}$  peut se faire en effectuant l'opération élémentaire  $L_1 \leftarrow L_1 + XL_2 + X^2L_3 + \dots + X^{n-1}L_n$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}(X))$  qui donne :

$$\begin{aligned} \chi_{C_P}(X) &= \begin{vmatrix} X & \cdots & 0 & -a_0 \\ -1 & \ddots & \vdots & -a_1 \\ \vdots & \ddots & X & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & X - a_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & P(X) \\ -1 & \ddots & \vdots & -a_1 \\ \vdots & \ddots & X & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & X - a_{n-1} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{n+1} P(X) (-1)^{n-1} = P(X) \end{aligned}$$

On peut aussi procéder comme suit. En notant  $\chi_{(a_0, \dots, a_{n-1})}(X)$  le polynôme caractéristique de  $C_P$  et en le développant par rapport à la première ligne, on a :

$$\chi_{(a_0, \dots, a_{n-1})}(X) = \begin{vmatrix} X & \cdots & 0 & -a_0 \\ -1 & \ddots & \vdots & -a_1 \\ \vdots & \ddots & X & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & X - a_{n-1} \end{vmatrix} = X \cdot \chi_{(a_1, \dots, a_{n-1})}(X) - a_0$$

puis par récurrence, on obtient  $\chi_{(a_0, \dots, a_{n-1})}(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ . □

**Corollaire 1.4** :  $C_P$  est inversible si, et seulement si,  $P(0) \neq 0$ . Dans ce cas, on a :

$$C_P^{-1} = \frac{1}{a_0} \left( C_P^{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} a_k C_P^{k-1} \right) = \begin{pmatrix} -\frac{a_1}{a_0} & 1 & \cdots & 0 \\ -\frac{a_2}{a_0} & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ \frac{1}{a_0} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \pi_{C_P^{-1}}(X) = \chi_{C_P^{-1}}(X) = -\frac{1}{a_0} X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$$

**Preuve.** On a  $\det(C_P) = (-1)^n \chi_{C_P}(0) = (-1)^n P(0) = (-1)^{n+1} a_0$ , donc  $C_P$  est inversible si, et seulement si,  $a_0 = P(0) \neq 0$ . Dans ce cas, de l'égalité

$P(C_P) = \pi_{C_P}(C_P) = 0$ , on déduit que  $C_P^{-1} = \frac{1}{a_0} \left( C_P^{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} a_k C_P^{k-1} \right)$ , donc

$u_P^{-1}(e_1) = \frac{1}{a_0} \left( e_n - \sum_{k=1}^{n-1} a_k e_k \right)$  et  $u_P^{-1}(e_k) = u_P^{-1}(u_P(e_{k-1})) = e_{k-1}$  pour  $k$  compris entre 2 et  $n$ , ce qui nous donne :

$$C_P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{a_1}{a_0} & 1 & \cdots & 0 \\ -\frac{a_2}{a_0} & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ \frac{1}{a_0} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Dans la base  $(f_1, \dots, f_n) = (e_n, e_{n-1}, \dots, e_2, e_1)$ , la matrice de  $u_P^{-1}$  est :

$$C_Q = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_0} \\ 1 & \ddots & \vdots & -\frac{a_{n-1}}{a_0} \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -\frac{a_1}{a_0} \end{pmatrix}$$

soit la matrice compagnon du polynôme  $Q(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$ , où  $\alpha_0 = \frac{1}{a_0}$  et

$\alpha_k = -\frac{a_{n-k}}{a_0}$  pour  $1 \leq k \leq n-1$ . On a donc :

$$\pi_{C_P^{-1}}(X) = \chi_{C_P^{-1}}(X) = -\frac{1}{a_0} X^n \left( \frac{1}{X^n} - \sum_{j=0}^{n-1} a_j \frac{1}{X^j} \right) = -\frac{1}{a_0} X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$$

□

# Index

- équations différentielles, 240
- adjointe (matrice), 48
- Bézout, 2
- Bernoulli, 212
- Birkhoff, 153
- Carathéodory, 145
- Cauchy (problème de), 229
- Cauchy-Schwarz (inégalité de), 35, 43, 47
- Cayley-Hamilton, 13
- Cholesky, 175
- conditionnement, 95
- convexe, 143
- Courant-Fischer, 100
- Cramer, 161
- Crout (méthode de), 174
- décomposition des noyaux, 17
- décomposition LR, 173
- décomposition polaire, 51, 79
- décomposition singulière, 64
- déflation, 212
- déterminants principaux, 171
- descente (méthode de), 190
- diagonale strictement dominante, 8
- diagonalisable (endomorphisme), 33
- diagonalisable (matrice), 33
- différentiable (fonction), 188
- dilatation (matrice de), 164
- doublement stochastique (matrice), 142
- Dunford, 20
- enveloppe convexe, 144
- espaces caractéristiques, 18
- euclydien (espace), 35
- exponentielle (d'une matrice), 233
- fonctionnelle quadratique, 189
- Frobenius (matrice de), 172
- Gauss (pivots de), 168
- Gauss-Jordan, 176
- Gauss-Seidel, 179
- Gelfand, 90
- Gerschgorin (disques de), 8
- Gerschgorin-Hadamard, 7
- Givens, 218
- gradient (vecteur), 188
- gradient conjugué (méthode du), 193
- Gram-Schmidt, 37, 48
- groupe topologique, 77
- Hadamard (inégalité de), 63
- hausdorffien, 96
- hermitien (espace), 47
- hermitienne (matrice), 49
- hermitienne définie positive (matrice), 49
- hermitienne positive (matrice), 49
- Hessenberg (matrice de), 223
- Hilbert (matrice de), 113, 163
- Householder, 89
- Householder (méthode de), 44
- Householder (matrice de), 44
- hyper-quadratique, 189
- hyperplan affine, 143
- hyperplan d'appui, 148
- idéal annulateur, 2
- indice (d'une valeur propre), 5
- irréductible (matrice), 135
- isotrope (cône), 43
- Jacobi, 178, 213
- Jordan, 52
- Jordan (forme réduite de), 55

- Krein-Milman, 151  
 Krylov, 15  
 Leverrier, 17  
 logarithme matriciel, 247  
 méthode itérative, 177  
 matrice élémentaire, 165  
 matrice compagnon, 10  
 matrice de Frobenius, 10  
 mesure (d'un angle), 36  
 Minkowski (inégalité de), 36, 47  
 Newton (formules de), 15  
 nilpotent, 6  
 normale (matrice), 49  
 norme matricielle, 73  
 orientation, 168  
 orthogonal (endomorphisme), 40  
 orthogonale (famille), 37  
 orthogonale (matrice), 38  
 orthogonaux (vecteurs), 36, 48  
 orthonormée (famille), 37  
 Ostrowski, 10  
 Ostrowski-Reich, 182  
 parallélogramme, 36  
 permutation (matrice de), 134, 166  
 Perron-Frobenius, 129, 133, 138  
 point extrême (d'un convexe), 149  
 polyèdre, 143  
 polynôme caractéristique, 3  
 polynôme minimal, 2  
 positive (matrice), 123  
 primitive (matrice), 139  
 produit scalaire euclidien, 35  
 produit scalaire hermitien, 47  
 projecteurs spectraux, 20  
 projection orthogonale, 146  
 puissance inverse, 212  
 puissance itérée, 209  
 QR (décomposition), 39  
 réductible (matrice), 135  
 résidu (vecteur), 189  
 résultant, 83  
 Rayleigh-Ritz (quotient de), 96  
 Rayleigh-Ritz (théorème de), 97  
 rayon spectral, 86  
 relaxation (méthode de), 181  
 relaxation par blocs, 187  
 Richardson, 206  
 rotation, 38  
 Schur (norme de), 65  
 signature, 174  
 Souriau, 17  
 sous espace cyclique, 13  
 sous espace propre, 2, 3  
 sous-matrices principales, 61, 171  
 sous-multiplicative (norme), 76  
 spectre, 2, 3  
 stochastique (matrice), 141  
 Sylvester (matrice de), 83  
 symétrique (matrice), 42  
 symétrique définie positive (matrice), 42  
 symétrique positive (matrice), 42  
 systèmes différentiels, 229, 242  
 taux asymptotique de convergence, 178  
 taux moyen de convergence, 178  
 Tchebychev, 186  
 transvection (matrice de), 164  
 trigonalisable (endomorphisme), 31  
 trigonalisable (matrice), 31  
 unipotente (matrice), 247  
 unitaire (matrice), 48  
 unitaire (polynôme), 2  
 valeur propre, 2, 3  
 valeurs singulières, 87  
 variation des constantes, 245  
 vecteur propre, 2, 3  
 Weyl, 101  
 Wielandt, 141  
 wronskien, 244  
 Young-Varga, 185