



Jolidon

PHYSIQUE EXPÉRIMENTALE

Optique, magnétisme, électrotechnique,
mécanique, thermodynamique
et physique non linéaire



Collectif **Jolidon**

.....

La collection « Enseignement Sup Physique » se présente comme une introduction sur des sujets incontournables en physique. Adaptée aux besoins des étudiants et des chercheurs, le traitement rigoureux, mais accessible, de chaque sujet est idéal pour ceux qui veulent une amorce dans un sujet donné pour les préparer à une étude ou à une recherche plus avancée.

Ce livre regroupe 25 expériences de physique. Pour chacune, les aspects théoriques nécessaires à la compréhension du phénomène physique et l'élaboration du protocole sont détaillés. Des mesures, obtenues en laboratoire d'enseignement, sont présentées et systématiquement comparées aux prédictions théoriques. Un traitement rigoureux des incertitudes permet des discussions riches, allant au-delà des modèles proposés. Des schémas détaillés des dispositifs expérimentaux et des traitements numériques dans le langage libre Python facilitent la reproduction des expériences.

Pensé pour les candidats aux concours du CAPES et de l'agrégation, cet ouvrage s'adresse également aux étudiants de CPGE, de licence et de master, ainsi qu'aux enseignants du secondaire et du supérieur.

*Le collectif **Jolidon** est composé de Éric Brillaux, Benjamin Crinquand, Louisiane Devaud, David Dumont, Camille Eloy, Antoine Essig, Benjamin Guiselin, Christopher Madec, Alexandre Michel, Jérémy Sautel, Théo Sépulcre et Louis Villa.*



Illustration de couverture : Niels Bohr et Wolfgang Pauli jouant avec une toupie tippe-top lors de l'inauguration du nouvel institut de physique à Lund, en Suède (Erik Gustafson, 1954).

ISBN : 978-2-7598-2364-2



9 782759 823642

JOLIDON

Physique expérimentale

Optique, magnétisme, électrotechnique,
mécanique, thermodynamique
et physique non linéaire

 edp sciences

Illustration de couverture : Niels Bohr et Wolfgang Pauli jouant avec une toupie tippe-top lors de l'inauguration du nouvel institut de physique à Lund, en Suède (Erik Gustafson, 1954).

Le collectif JOLIDON est composé de : Éric Brillaux, Benjamin Crinquand, Louisiane Devaud, David Dumont, Camille Eloy, Antoine Essig, Benjamin Guiselin, Christopher Madec, Alexandre Michel, Jérémy Sautel, Théo Sépulcre et Louis Villa, anciens élèves de l'ENS de Lyon, agrégés de physique et doctorants.

Imprimé en France

ISBN (papier) : 978-2-7598-2364-2 - ISBN (ebook) : 978-2-7598-2523-3

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés, réservés pour tous pays. La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (alinéa 1^{er} de l'article 40). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du code pénal.

Table des matières

Avant-propos	1
Incertitudes et ajustements	3

I Optique

I.1 Réglage d'un interféromètre de Fabry-Perot	21
I.2 Spectroscopie à l'aide d'un interféromètre de Fabry-Perot	40
I.3 Décalage isotopique hydrogène-deutérium	47
I.4 Effet Zeeman	54
I.5 Spectroscopie par transformée de Fourier	73

II Magnétisme

II.1 Ascension d'un liquide paramagnétique	105
II.2 Cycle d'hystérésis d'un milieu ferromagnétique	122
II.3 Domaines de Weiss : origine de l'hystérésis ferromagnétique	142
II.4 Mesure du moment magnétique d'un aimant permanent	168
II.5 Freinage magnétique dans un tube conducteur	181

III Électrotechnique

III.1 Machine à courant continu	199
III.2 Machine asynchrone	223
III.3 Transformateur électrique monophasé	247

IV Mécanique

IV.1 Mesure du module de Young par méthode acoustique	271
IV.2 Dynamique d'un gyroscope déséquilibré	289
IV.3 Dynamique d'un gyroscope libre	308

V Thermodynamique

V.1 Thermométrie à gaz	323
----------------------------------	-----

V.2 Thermométrie électrique	339
V.3 Expérience de Rüchardt	356
V.4 Mesure d'une chaleur latente de vaporisation.	369
V.5 Supraconductivité : lévitation Meissner et chute de résistivité.	379
V.6 Diffusion du glycérol dans l'eau	400

VI Phénomènes non linéaires et instabilités

VI.1 Pendule double puits électronique	419
VI.2 Résonance paramétrique d'un circuit RLC	436
VI.3 Instabilité de Rayleigh-Plateau	451
Index	473

Avant-propos

Théorie et expérience sont d'égale importance pour la modélisation et compréhension d'un phénomène physique ; pourtant ces deux aspects sont souvent traités séparément dans les manuels d'enseignement. En rédigeant ce recueil de physique expérimentale, nous avons voulu refléter leur dialogue dans un exposé didactique. L'exhaustivité étant impossible, nous avons plutôt cherché à illustrer des phénomènes originaux au détriment de certaines expériences classiques, de façon à éviter les recoupements avec des manuels récents, généralistes ou spécialisés. Pour chaque expérience, nous proposons un cadre théorique suffisamment large pour comprendre en détail le protocole, mais aussi en cerner les limites. Cela offre un regard critique sur le résultat expérimental, et enrichit sa discussion. En retour, toute déviation au résultat attendu, détectée par un traitement rigoureux des incertitudes, motive l'approfondissement de l'analyse théorique.

Ce livre est destiné à la préparation des concours du CAPES et de l'agrégation, propices au dialogue entre ces aspects pratiques et théoriques. Nous espérons que les étudiants de classes préparatoires ou des universités et leurs enseignants y trouveront aussi des pistes de travaux pratiques, de TIPE, voire des illustrations originales de leurs cours. L'aller-retour entre théorie et expérience pourrait également offrir aux étudiants un aperçu de la démarche de recherche. Pour s'adresser à ces différents lecteurs, nous avons souhaité que chaque expérience se suffise à elle-même. Des compléments développent les étapes plus techniques, et une bibliographie apporte des pistes pour approfondir les sujets abordés dans chaque expérience.

Cet ouvrage est divisé en six thèmes : optique, magnétisme, électrotechnique, thermodynamique, mécanique, et un regroupement de phénomènes non linéaires et d'instabilités. Un chapitre préliminaire rappelle les notions d'incertitudes et d'ajustement de données expérimentales. Les concepts importants sont illustrés par de nombreux exemples indiqués par un trait vertical vert |. Dans les expériences, un trait noir | indique une remarque d'ordre physique ; un trait rouge | une remarque d'ordre technique, utile à la réalisation de l'expérience.

Cet ouvrage est le fruit d'un travail collectif, et ce, bien au-delà du cercle de ses auteurs. Il n'aurait pu voir le jour sans l'aide et le soutien permanents dont nous avons bénéficié lors de notre scolarité à l'École normale supérieure (ENS) de Lyon. Nous avons eu la chance d'y côtoyer des enseignants passionnés, passionnants et investis. Ce soutien des équipes pédagogique et administrative nous a été particulièrement précieux durant notre année de préparation au concours de l'agrégation : nous tenons à les en remercier chaleureusement. Nous souhaitons également remercier l'équipe technique, investie dans les modules expérimentaux en physique pour toute l'école, en particulier Christian Ballesio, Benoît Capitaine, Adrien Favero et Jacques Marot. Nous souhaitons aussi remercier Martin Devaud, Clément Gouiller, Benjamin Huard, Sylvain Joubaud, Philippe Odier, Jason Reneuve, Romain Volk et

Jean-Paul Zaygel pour les discussions fructueuses autour de certaines expériences, ainsi que Benoît Cerutti et Serge Florens pour leur soutien à notre projet.

Cette publication prend sa forme achevée grâce à nos relecteurs scientifiques, qui ont accepté de l'examiner et de la commenter pour enrichir ses expériences. Trois personnes ont ainsi travaillé à nos côtés : Luc Dettwiller, professeur en classes préparatoires au lycée Blaise Pascal de Clermont-Ferrand, docteur en optique et Observateur Associé au coronographe CLIMSO du Pic du Midi ; Hervé Gayvallet, maître de conférences à l'ENS de Lyon et Patrick Rigord, professeur agrégé à l'ENS de Lyon. Nous avons à cœur à travers ces quelques lignes de leur témoigner notre immense gratitude. Leurs commentaires scientifiques, toujours pertinents et circonstanciés, ont beaucoup enrichi notre travail. Par leur soutien et leurs encouragements, ils nous ont motivés pour mener à bien ce projet qui leur doit tant.

Nous remercions enfin notre éditeur EDP Sciences d'avoir accepté de publier cet ouvrage dans sa collection « Enseignement Sup Physique ».

Nous sommes bien évidemment intéressés par les remarques et discussions scientifiques à propos de cet ouvrage dans lequel, malgré de nombreuses relectures, des erreurs et coquilles ont pu se glisser. N'hésitez donc pas à nous contacter à l'adresse *e-mail* suivante : groupe.jolidon@gmail.com.

Le collectif JOLIDON

Notations mathématiques : Les vecteurs sont notés en gras, le produit vectoriel \times et l'opérateur différentiel vectoriel nabla ∇ . Afin d'alléger les notations, nous omettons les parenthèses après un trait de fraction : nous noterons ainsi a/bc au lieu de $a/(bc)$. La dérivée temporelle d'une fonction f ne dépendant que du temps t est parfois notée $\dot{f} = df/dt$.

Incertitudes et ajustements

Le résultat de toute mesure est entaché d'une erreur, que l'on peut estimer en évaluant une incertitude. Ce chapitre met l'accent sur une utilisation pratique des incertitudes et de l'ajustement d'un modèle par rapport à un jeu de données expérimentales. Nous tirons grandement profit de la Réf. [1], dont nous recommandons la lecture dans un premier temps, que l'on pourra compléter des Réf. [2-4] pour approfondir la discussion.

Sommaire

1	Notion d'incertitude	3
2	Évaluation des incertitudes	6
3	Ajustement d'un modèle sur des données	11

1 Notion d'incertitude

Dans toute la suite, nous appellerons **point de mesure** la donnée d'une seule valeur mesurée. En répétant N fois l'évaluation d'une grandeur physique dans les mêmes conditions, on obtient alors une **série de mesures**, composée de N points de mesure, à partir de laquelle on détermine le **résultat de mesure**.

1.1 Erreurs expérimentales

Au cours d'une expérience, il est impossible de maîtriser l'intégralité des paramètres pouvant influencer sur la grandeur mesurée. Chaque point de mesure est entaché d'une **erreur**, définie comme l'écart à la valeur vraie¹, et que l'on souhaite minimiser. En pratique, la valeur vraie – et donc l'erreur – sont inconnues, mais deux types d'erreurs peuvent être distingués, selon leur origine et leur nature [1]. Les erreurs aléatoires proviennent de fluctuations non maîtrisées des grandeurs qui influent sur la mesure, de sorte que chaque répétition ne se fait jamais exactement dans les mêmes conditions. Les erreurs systématiques (ou biais) sont, elles, identiques pour de multiples réalisations de l'expérience dans les mêmes conditions.

La Fig. 1 schématise quatre situations qualitatives après obtention d'une série de mesures. Pour caractériser la série de mesures (dont chaque point est représenté par une croix bleue), il est courant de distinguer les notions de justesse, de précision et de fidélité. La **justesse** évalue l'écart entre le résultat de mesure et la valeur vraie (croix rouge), et la **précision** est inversement proportionnelle à la dispersion des points de mesure autour du résultat de mesure. On parle de **fidélité** lorsqu'il y a à la fois justesse et précision. Le cas (i) correspond à une série de mesures très dispersée, mais centrée autour de la valeur vraie. La mesure est juste mais peu précise. Le

1. La définition de la valeur vraie est problématique [2, 4]. En pratique, la valeur vraie est inconnue, puisqu'elle correspond au résultat d'une mesure fictive idéale, dont l'erreur serait nulle.

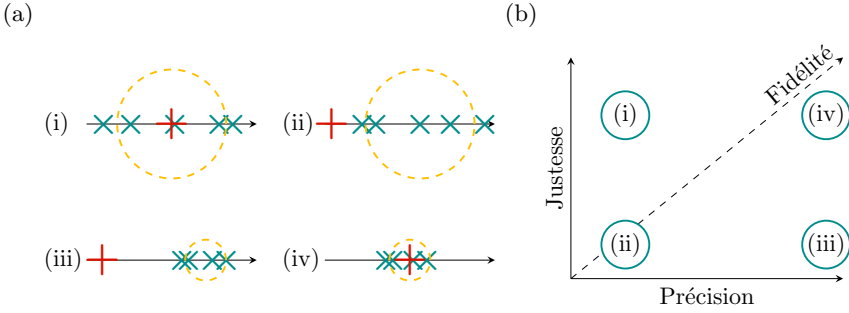


Fig. 1 (a) Distributions possibles d'une série de mesures. La valeur vraie est représentée par une croix rouge et les points de mesure par des croix bleues. Le cercle tireté jaune symbolise la dispersion des résultats. (b) Position des différents cas dans un diagramme justesse/précision.

cas (ii) est le plus défavorable : les points sont dispersés et en moyenne éloignés de la valeur vraie. La mesure est donc peu fidèle. Dans le cas (iii) la mesure est précise, mais peu juste. Cette situation trahit l'existence d'une erreur systématique. Enfin, le cas (iv) présente la situation idéale d'une haute fidélité : la mesure est juste et précise. En conclusion, une erreur aléatoire entraîne une perte de précision, et une erreur systématique une perte de justesse.

Cependant, cette distinction entre erreurs aléatoires et systématiques n'a que peu d'utilité pratique. En effet, il est impossible de déceler une erreur systématique sans connaître la valeur vraie. On peut toutefois estimer quantitativement la composante aléatoire de l'erreur. Il est donc préférable, plutôt que de classer les erreurs selon leur nature, de distinguer les **méthodes d'estimation** des erreurs aléatoires [2]. Les deux méthodes existantes sont de nature probabiliste, mais l'une est de nature statistique (Sec. 2.1) et l'autre non (Sec. 2.2).

1.2 Définition de l'incertitude

Supposons que l'on dispose d'une série de mesures comportant un nombre infini de points, que l'on caractérise par une variable aléatoire x (dimensionnée), associée à une densité de probabilité $p(x)$. Tout point de mesure appartient au support de p , noté $[a, b]$. À partir de cette série de mesures fictive, on peut identifier le résultat de mesure à la moyenne statistique de x , définie par

$$\langle x \rangle = \int_a^b p(x)x \, dx. \quad (1)$$

La dispersion des points de mesure autour du résultat de mesure, associée à la largeur caractéristique de p , est définie par l'écart-type

$$\sigma_x = \sqrt{\int_a^b p(x)(x - \langle x \rangle)^2 \, dx}. \quad (2)$$

Cependant, lorsqu'on réalise une expérience, on ne connaît ni la distribution p , ni son support $[a, b]$, parce qu'on ne dispose que d'un nombre fini de points de mesure.

Les Éq. (1) et (2) sont donc inutilisables en pratique, et il est nécessaire d'estimer la distribution de probabilité p , ou au moins $\langle x \rangle$ et σ_x . Nous notons $\langle x \rangle_{\text{est}}$ l'estimation de la moyenne de p . Soulignons que $\langle x \rangle_{\text{est}}$ est aussi une variable aléatoire de moyenne $\langle x \rangle$, et d'écart-type $\sigma_{\langle x \rangle}$ ².

Toute la difficulté lors de l'estimation de p provient du fait qu'elle comporte en général une composante qui peut être évaluée statistiquement, et une autre non. Il est donc nécessaire d'utiliser différentes méthodes d'estimation et de les coupler pour déterminer p aussi fidèlement que possible. Nous montrerons comment réaliser ces estimations dans la Sec. 2.

On appelle incertitude la grandeur qui quantifie la finesse de l'intervalle de valeurs que peut vraisemblablement prendre la grandeur mesurée, et donc la fiabilité que l'on peut attribuer au résultat de mesure. Il est indispensable de l'évaluer pour comparer des résultats expérimentaux entre eux, ou encore le résultat d'une expérience à une valeur vraie, qu'elle soit issue d'un modèle théorique ou d'un étalonnage. On assimile dans tout ce livre l'incertitude sur le résultat de mesure à l'**incertitude-type** Δx , définie comme l'estimation de $\sigma_{\langle x \rangle}$. Une fois les estimations réalisées, on présente le résultat sous la forme d'un intervalle centré,

$$\text{résultat de mesure} = (\langle x \rangle_{\text{est}} \pm \Delta x) \text{ unité.} \quad (3)$$

1.3 Crédibilité et présentation du résultat de mesure

Pour une distribution de probabilité gaussienne, l'incertitude-type donne un **intervalle de confiance** de 68 %, autrement dit la valeur vraie possède une probabilité d'environ 0,68 de se trouver dans l'intervalle $[\langle x \rangle_{\text{est}} - \Delta x, \langle x \rangle_{\text{est}} + \Delta x]$. Ce choix signifie aussi que, pour un grand nombre de mesures, environ un tiers des valeurs ne sont pas contenues dans le domaine indiqué par l'Éq. (3). On jugera donc qu'un résultat de mesure est compatible avec la valeur vraie si $\langle x \rangle_{\text{est}}$ ne s'écarte pas de plus de $2\Delta x$ de cette dernière³, ce qui correspond à un intervalle de confiance de 95 %.

Supposons que l'on estime la moyenne arithmétique à partir de M séries de mesures (autrement dit on réalise M fois une expérience donnée, afin d'obtenir M résultats de mesure). Si les expériences sont indépendantes, la variable $\langle x \rangle_{\text{est}}$ suit une loi de probabilité gaussienne lorsque $M \rightarrow +\infty$, quelle que soit la loi de probabilité p que suit la variable aléatoire x [3]. Ce résultat, appelé théorème central limite, justifie l'utilisation de la distribution gaussienne dans l'interprétation des intervalles de confiance.

Pour écrire le résultat de façon cohérente, la dernière décimale de $\langle x \rangle_{\text{est}}$ en écriture scientifique doit correspondre au même ordre de grandeur que l'incertitude Δx . Il est donc suffisant d'écrire Δx avec un seul chiffre significatif. Une exception peut être faite lorsque la troncature entraînerait une perte importante d'information, en particulier si le chiffre dominant de l'incertitude est petit (typiquement 1 ou 2).

2. Par simplicité, et afin d'éviter toute confusion entre l'écart-type et son estimation, nous notons $\sigma_{\langle x \rangle}$ au lieu de $\sigma_{\langle x \rangle_{\text{est}}}$, bien que la variable aléatoire soit $\langle x \rangle_{\text{est}}$ et non $\langle x \rangle$.

3. Il existe un critère similaire pour justifier l'élimination d'un point de mesure jugé suspect, appelé critère de Chauvenet (voir par exemple la Réf. [3]).

Écrire $2,6 \pm 1,3$ plutôt que 3 ± 1 peut se justifier, car le deuxième chiffre significatif de l'incertitude représente environ 12 % de la valeur centrale du résultat de mesure.

2 Évaluation des incertitudes

Il existe deux méthodes d'évaluation des incertitudes. La première est une méthode statistique, dite de **type A**, où les incertitudes sont déterminées sur un ensemble d'occurrences expérimentales. Une loi de probabilité est donc évaluée a posteriori. La seconde, de **type B**, ne correspond pas à une évaluation statistique. Elle présuppose une loi de probabilité en se fondant sur la connaissance qu'un évènement se produise a priori [2].

2.1 Évaluation de type A

L'évaluation de type A est purement objective, et consiste en un traitement statistique d'une série de mesures $\{x_i\}$, $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$. Elle est adaptée aux situations expérimentales où l'erreur provient principalement d'une dispersion statistique. Sans connaissance préalable de la distribution de probabilité p , la meilleure estimation⁴ de $\langle x \rangle$ est donnée par la moyenne arithmétique des N valeurs mesurées x_i [5],

$$\langle x \rangle_{\text{est}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad (4)$$

et la meilleure estimation de la composante statistique de l'écart-type σ_x est⁵ [3]

$$\sigma_{x, A} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \langle x \rangle_{\text{est}})^2}. \quad (5)$$

L'Éq. (5) donne l'incertitude sur chacun des points de mesure constituant la série. On cherche plutôt à évaluer l'incertitude sur la moyenne estimée de la série de mesures, qui s'identifie à l'incertitude-type sur le résultat de mesure et vaut

$$\sigma_{\langle x \rangle, A} = \frac{\sigma_{x, A}}{\sqrt{N}}. \quad (6)$$

Plus le nombre N de valeurs mesurées est grand, plus l'estimation de la moyenne est précise, autrement dit plus l'incertitude-type sur la moyenne est faible. Dans ce cas, on écrira le résultat de mesure sous la forme $\langle x \rangle_{\text{est}} \pm \sigma_{x, A} / \sqrt{N}$.

Alice mesure 5 fois le temps de chute d'un objet d'une hauteur fixe avec un chronomètre très précis, et obtient la série de mesures suivante (en secondes) : {12,7 ; 11,9 ; 12,3 ; 11,7 ; 12,2}. En utilisant les Éq. (4) et (6), le résultat de mesure prend la forme $(12,2 \pm 0,2)$ s. Ici, le temps de réaction de l'expérimentateur est bien plus grand que

4. Parmi les estimateurs non biaisés, le meilleur est celui dont la convergence avec N est la plus rapide vers la valeur vraie [3].

5. La moyenne étant inconnue, il faut l'estimer par l'Éq. (4), ce qui impose une relation entre les x_i et conduit à diviser par $N - 1$ (au lieu de N) afin d'obtenir un estimateur $\sigma_{x, A}$ non biaisé.

la résolution de l'appareil et l'évaluation de type A suffit pour évaluer l'incertitude.

Attention toutefois, l'Éq. (6) estime correctement l'incertitude totale seulement si les fluctuations aléatoires sont bien plus grandes que la résolution de l'appareil de mesure, ou l'incertitude de lecture d'une graduation.

Quel que soit le nombre de mesures de la taille d'un objet avec une règle, l'incertitude est toujours minorée par la résolution de la règle (par exemple, 1 mm) : l'Éq. (6) ne donne pas l'incertitude totale.

Pour tenir compte de ces limitations, il faut recourir au second type d'estimation : l'évaluation de type B.

2.2 Évaluation de type B

L'évaluation de type B est réalisée en postulant une distribution de probabilité p_0 raisonnable à partir de connaissances a priori sur la grandeur mesurée. L'incertitude-type s'obtient alors par l'écart-type de p_0 , donné par l'Éq. (2). Cette estimation ne s'obtient pas seulement à partir d'une série de mesures, mais dépend de facteurs extérieurs : expérience précédente, valeur tabulée par un constructeur, calibration, littérature (*handbook*), etc. À défaut d'une méthode générale, l'estimation (à travers le choix de p_0) est plus délicate et la méthode employée doit être exposée clairement. Dans la suite, nous discutons les quelques situations fréquemment rencontrées.

2.2.1 Lecture de graduations et appareil analogique

Cette situation se rencontre lors de la lecture d'une longueur sur une règle, d'un volume sur une éprouvette graduée, ou de l'utilisation de tout appareil analogique avec graduations, dont le pas est noté δ . À cause de la résolution finie de l'appareil de mesure, la valeur mesurée doit être interpolée entre les deux graduations les plus proches.

Deux situations caractéristiques peuvent se présenter. S'il est impossible de situer la mesure au sein de l'intervalle $[n\delta, (n+1)\delta]$ entre deux graduations consécutives, on considère que la distribution de probabilité p_0 des résultats de mesure est uniforme sur cet intervalle. L'incertitude-type vaut alors $\sigma_B = \sigma_{\text{uni}} = \delta/2\sqrt{3}$ (Fig. 2(a)). En revanche, si la mesure se situe plutôt au centre de l'intervalle, on peut

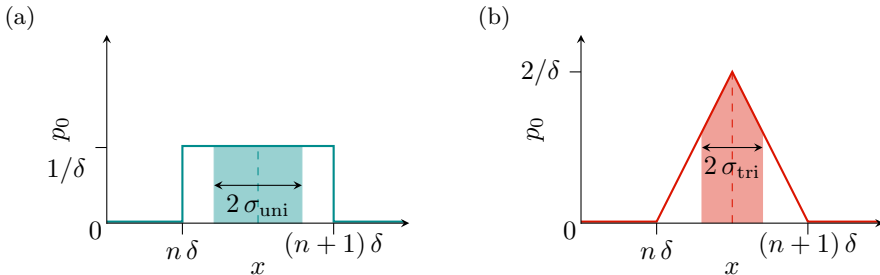


Fig. 2 Densités de probabilité p_0 , (a) uniforme et (b) triangulaire, entre deux graduations $n\delta$ et $(n+1)\delta$. L'incertitude de type B s'identifie à l'écart-type (σ_{uni} ou σ_{tri}) de p_0 , qui couvre la surface colorée centrée au milieu des graduations.

privilégier une densité de probabilité triangulaire, pour laquelle $\sigma_B = \sigma_{\text{tri}} = \delta/2\sqrt{6}$ (Fig. 2(b)). De la même manière, si l'on estime que le résultat de mesure est proche d'une graduation, on peut utiliser une distribution triangulaire, centrée cette fois sur la graduation⁶.

Cette méthode s'applique aussi aux situations où l'on ne peut pas mesurer précisément une valeur, mais seulement un intervalle. Par exemple, lors de la détermination de la fréquence de résonance d'un circuit RLC à l'aide d'un oscilloscope, il est parfois difficile de situer précisément le maximum de la tension aux bornes de la résistance. Si la tension est considérée comme maximale sur l'intervalle [980 Hz, 996 Hz], l'incertitude associée vaut $16/2\sqrt{3}$ Hz \simeq 4,6 Hz, et l'on écrira le résultat sous la forme $f_{\text{rés}} = (988 \pm 5)$ Hz.

2.2.2 Appareil numérique

La valeur indiquée par un appareil numérique est toujours accompagnée d'une incertitude liée à sa constitution, qui dépend du calibre, et précisée par le constructeur dans la notice. Dans ce cas, on parle de précision de l'appareil numérique. L'incertitude donnée par le constructeur est toujours supérieure à la résolution de l'appareil. Si l'instrument de mesure est mal connu, il peut être nécessaire de l'étalonner.

L'incertitude constructeur d'un voltmètre indique $0,001U + 4 \text{ digits}$ (parfois noté N_{UR} , pour unité de représentation). Au pourcentage indiqué de la valeur U lue s'ajoute alors 4 fois la plus petite puissance de dix affichée par le voltmètre dans le calibre utilisé. Si on lit une tension de 2,3120 V sur l'afficheur, on écrira le résultat $(2,312 \pm 0,003)$ V. Parfois une valeur donnée remplace les *digits*, comme dans l'Exp. V.1, « Thermométrie à gaz », où le constructeur du manomètre numérique indique une incertitude sur la pression de $0,01p + 4$ hPa.

2.3 Évaluations composées des incertitudes

Les sources d'erreur dans une expérience sont en général multiples, et chacune est estimée par une méthode éventuellement différente (A ou B). On évalue l'incertitude totale en composant les incertitudes obtenues séparément par chaque méthode, que celles-ci soient identiques à chaque répétition de l'expérience (Sec. 2.3.1), ou différentes (Sec. 2.3.2).

2.3.1 Incertitudes identiques à chaque répétition de la mesure

Lorsque la mesure est affectée d'incertitudes évaluées par les deux méthodes A et B, et que l'incertitude de type B est identique à chaque répétition de la mesure, on effectue une sommation quadratique⁷ :

$$\Delta x = \sqrt{\sigma_{(x),A}^2 + \sigma_B^2}, \quad (7)$$

6. Il faut garder à l'esprit que l'on n'estime l'erreur qu'au premier ordre. S'il existe évidemment une incertitude sur cette estimation, suite au choix de la distribution de probabilité, il serait inutile de vouloir quantifier cette « incertitude sur l'incertitude ».

7. On peut montrer que pour deux variables aléatoires et non corrélées X et Y d'écart-types σ_X et σ_Y , l'écart-type sur la variable $X + Y$ est donné par $\sigma_{X+Y} = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}$ [5].

où $\sigma_{\langle x \rangle, A}$ est obtenu par traitement statistique et donné par l'Éq. (6), et σ_B désigne l'incertitude-type sur chaque point de mesure évaluée par la méthode B. L'incertitude sur le résultat de mesure est donc minorée par σ_B , quel que soit le nombre de points de mesure.

Alice consulte la notice constructeur du chronomètre, et lit une précision de $\pm 0,6$ s à 95 %. Elle divise donc par deux afin d'obtenir l'incertitude-type (à 68 %) associée $\sigma_B = 0,3$ s. En composant avec l'incertitude statistique précédemment obtenue $\sigma_{\langle x \rangle, A} = 0,2$ s, selon l'Éq. (7), le résultat de mesure devient $(12,2 \pm 0,4)$ s.

2.3.2 Incertitudes différentes à chaque répétition de la mesure

Supposons que l'on dispose d'une série de mesures dont chaque point x_i est issu d'une répétition de la même expérience. Lorsque plusieurs personnes réalisent une expérience, elles peuvent obtenir des résultats de mesure et des incertitudes différentes. C'est le cas lorsqu'elles n'utilisent pas des instruments de même précision, ou qu'elles ne mènent pas l'expérience dans les mêmes conditions. L'incertitude Δx_i sur chaque point de mesure peut, comme dans l'Éq. (7), provenir de la composition d'incertitudes évaluées par les méthodes A et B. La meilleure estimation de $\langle x \rangle$ s'obtient en pondérant la moyenne par les poids $w_i = 1/\Delta x_i^2$ [3]; autrement dit,

$$\langle x \rangle_{\text{est}} = \frac{\sum_{i=1}^N w_i x_i}{\sum_{i=1}^N w_i}. \quad (8)$$

Un point contribue donc d'autant moins qu'il est incertain (relativement aux autres). L'incertitude-type s'estime à partir des N points de mesure par

$$\Delta x = \left(\sum_{i=1}^N w_i \right)^{-1/2}. \quad (9)$$

Elle est toujours inférieure au minimum des Δx_i .

Lors de la mesure du temps de chute d'un même objet d'une hauteur fixée, Alice, Bob et Charles obtiennent les trois résultats de mesure suivants : $(12,2 \pm 0,4)$ s ; $(11,9 \pm 0,2)$ s et $(11,4 \pm 1,5)$ s. Les incertitudes diffèrent, car ils n'ont pas utilisé le même matériel ni réalisé le même nombre de points de mesure. En utilisant les Éq. (8) et (9), le résultat déduit de ces trois expériences se met sous la forme $(12,0 \pm 0,2)$ s. On remarque que l'expérience la moins précise affecte peu le résultat final.

Les équations précédentes ne doivent en revanche pas être utilisées lorsque les résultats de mesure sont incompatibles aux incertitudes près, sous peine de parvenir à un résultat aberrant.

Dans l'exemple précédent, le frère d'Alice affirme avoir obtenu le résultat $(21,9 \pm 0,2)$ s. Combiné au résultat d'Alice, l'utilisation abusive des Éq. (8) et (9) conduirait au résultat $(20,0 \pm 0,2)$ s, qui n'est compatible avec aucun des deux précédents. Il faut

utiliser les expériences de Bob et Charles pour conclure à l'existence probable d'une erreur systématique dans l'expérience du frère d'Alice.

2.4 Propagation des incertitudes

Suite à une expérience, la grandeur d'intérêt est souvent obtenue indirectement, comme une fonction de variables directement mesurées. Il est alors nécessaire de savoir comment l'incertitude sur les variables mesurées se répercute sur la grandeur d'intérêt : on parle de propagation de l'incertitude. Si l'on déduit une grandeur $q = q(y_1, \dots, y_n)$ de la mesure d'autres variables expérimentales **indépendantes** $\{y_i\}$, d'incertitudes $\{\Delta y_i\}$, l'incertitude-type Δq sur la grandeur q est donnée par la formule de propagation des incertitudes [3]

$$\Delta q = \left[\left(\frac{\partial q}{\partial y_1} \Delta y_1 \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial q}{\partial y_n} \Delta y_n \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (10)$$

Notons que cette formule fournit une estimation acceptable de l'incertitude si la fonction q est linéarisable localement en y_i . Si cela n'est pas le cas, une différentiation à l'ordre non nul suivant est nécessaire. Dans le cas où les mesures sont corrélées, l'Éq. (10) constitue une borne supérieure de l'incertitude [3].

Ne disposant pas de réfractomètre, Alice décide d'utiliser la loi de la réfraction de Snell-Descartes pour mesurer l'indice de réfraction $n_2 = n_1 \sin(i_1) / \sin(i_2)$ (et $n_1 < n_2$ de sorte que le rayon réfracté existe toujours). Elle connaît parfaitement l'indice n_1 et mesure au goniomètre les angles incident i_1 et réfracté i_2 positifs par rapport à la normale au dioptré. L'Éq. (10) conduit à

$$\Delta n_2 = \left[\left(\frac{n_1 \cos(i_1)}{\sin(i_2)} \Delta i_1 \right)^2 + \left(-\frac{n_1 \sin(i_1) \cos(i_2)}{\sin^2(i_2)} \Delta i_2 \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (11)$$

qui peut se réécrire plus simplement

$$\frac{\Delta n_2}{n_2} = \left[\left(\frac{\Delta i_1}{\tan(i_1)} \right)^2 + \left(\frac{\Delta i_2}{\tan(i_2)} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (12)$$

Lorsque i_1 tend vers 0, i_2 également et on ne mesure aucune déviation ; il est donc normal que l'incertitude diverge. Lorsque i_1 tend vers $\pi/2$, l'incertitude s'annule parce que la fonction $n_2(i_1)$ atteint un extremum et l'Éq. (10) cesse d'être valable.

Une situation fréquente est celle où q s'écrit comme un produit, soit $q(y_1, \dots, y_n) = \prod_{i=1}^n y_i^{\alpha_i}$. Dans ce cas (et ce cas seulement), l'Éq. (10) se simplifie en

$$\frac{\Delta q}{q} = \left[\left(\alpha_1 \frac{\Delta y_1}{y_1} \right)^2 + \dots + \left(\alpha_n \frac{\Delta y_n}{y_n} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (13)$$

On notera que cette formule ne s'applique pas à l'exemple précédent.

Dans l'Exp. II.5, « Freinage magnétique dans un tube conducteur », un aimant de moment magnétique \mathcal{M} et de masse m chute à vitesse constante v_{lim} dans un cylindre creux d'épaisseur w et de rayon moyen R , par compensation du poids et de la force de freinage inductive. La vitesse s'écrit $v_{\text{lim}} = amR^4/w\mathcal{M}^2$ dans l'approximation où le champ créé par l'aimant est dipolaire, où a est parfaitement connu. L'incertitude relative sur v_{lim} vaut

$$\frac{\Delta v_{\text{lim}}}{v_{\text{lim}}} = \left[\left(\frac{\Delta m}{m} \right)^2 + \left(4 \frac{\Delta R}{R} \right)^2 + \left(\frac{\Delta w}{w} \right)^2 + \left(2 \frac{\Delta \mathcal{M}}{\mathcal{M}} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

2.5 Sous-estimation ou surestimation des incertitudes

Lorsqu'on cherche à tester la validité d'un modèle théorique, une surévaluation des incertitudes peut masquer des effets subtils de désaccord avec la théorie (limites de la théorie du gaz parfait, effets relativistes sur la précession du périhélie de Mercure, etc.). Une sous-évaluation des incertitudes peut également poser problème, en remettant en cause un modèle potentiellement valide. C'est pourquoi il est essentiel de faire preuve de bon sens et d'honnêteté intellectuelle pour estimer au mieux les incertitudes dans une expérience donnée. Il faut justifier la manière dont les incertitudes sont évaluées (en particulier pour le type B), et prendre garde à leur mauvaise estimation et leurs répercussions sur l'interprétation des résultats.

3 Ajustement d'un modèle sur des données

Baucoup d'expériences visent à vérifier un modèle, c'est-à-dire à savoir avec quel degré de confiance l'ensemble des données expérimentales affectées de leurs incertitudes $\{(x_i, \Delta x_i), (y_i, \Delta y_i)\}$, est compatible avec une loi du type $y = f(x; \{\tau_j\})$ où $\{\tau_j\}$ désigne l'ensemble des paramètres d'ajustement. Dans ce livre, nous ramenons dès que possible à un modèle affine, de sorte que $\{\tau_j\}$ désigne le couple de réels $\{a, b\}$ tel que $f(x; \{a, b\}) = ax + b$.

L'ajustement consiste à trouver les valeurs optimales τ_j^* des paramètres τ_j telles que $f(x; \{\tau_j^*\})$ soit « le plus proche » possible des données expérimentales. Il permet en premier lieu de s'assurer que le modèle théorique décrit bien le phénomène physique, et en second lieu de déduire des caractéristiques du système à partir des τ_j^* . Bien que souvent réalisées simultanément, ces deux étapes sont conceptuellement très différentes. Un critère pertinent et couramment utilisé pour optimiser les paramètres d'ajustement est la méthode des moindres carrés.

3.1 Principe de la méthode des moindres carrés

La méthode des moindres carrés consiste à minimiser la somme des carrés des distances entre les points expérimentaux et le modèle [3]. En l'absence d'incertitude sur les abscisses ($\Delta x_i = 0$), les paramètres optimaux τ_j^* sont ceux qui minimisent la fonction

$$\chi^2(\{\tau_j\}) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{y_i - f(x_i; \{\tau_j\})}{\Delta y_i} \right)^2. \quad (14)$$

Les distances sont pondérées par l'inverse des incertitudes, si bien que la contribution d'un point sera d'autant moins importante qu'il est incertain (relativement aux autres). Dans le cas où les incertitudes sur les x_i ne sont pas négligeables, et indépendantes des incertitudes sur les y_i , on utilise la méthode de la variance effective [6]. La fonction à minimiser a alors pour expression

$$\chi^2(\{\tau_j\}) = \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - f(x_i; \{\tau_j\}))^2}{\Delta y_i^2 + (f'(x_i; \{\tau_j\})\Delta x_i)^2}, \quad (15)$$

où f' désigne la dérivée de f par rapport à x .

Ce résultat n'est valable que si la dérivée de f varie peu autour du point x_i , autrement dit si $f'(x_i; \{\tau_j\}) \gg f''(x_i; \{\tau_j\})\Delta x_i$. Cette approximation est toujours vérifiée pour un ajustement affine, car la dérivée seconde est nulle : c'est ce qui fait sa robustesse lorsque l'ajustement est réalisé par la méthode des moindres carrés.

La minimisation par la méthode des moindres carrés est optimale si f dépend linéairement des paramètres d'ajustement : on essaie donc, dans la mesure du possible, de se ramener à ce cas. Si par exemple le modèle prévoit $f(x; \{\tau_j\}) = \tau_1(\tau_2 x + x^3)$, on préférera ajuster la fonction $g(x; \{\tau'_j\}) = \tau'_1 x + \tau'_2 x^3$. La méthode est également mieux maîtrisée si f est affine en x . Dans l'exemple précédent⁸, il est préférable d'ajuster la fonction $h(x^2; \{\tau'_j\}) = g(x; \{\tau'_j\})/x = \tau'_1 + \tau'_2 x^2$, en veillant à adapter l'incertitude sur la nouvelle abscisse x^2 et la nouvelle ordonnée h . De la même manière, lorsque la courbe d'ajustement est une exponentielle, on préférera tracer son logarithme et recourir à un ajustement affine.

Cela est utilisé dans l'Exp. V.2, « Thermométrie électrique ». Lors du passage au logarithme, on veillera à recalculer les incertitudes avec l'Éq. (10) : pour une variable adimensionnée x d'incertitude-type Δx , on obtient $\ln(x + \Delta x) \simeq \ln(x) + \Delta x/x$ au premier ordre en $\Delta x/x$. L'incertitude devient une incertitude relative par passage au logarithme, et prend de très grandes valeurs lorsque x est proche de 0.

Les ajustements non affines sont possibles, mais plus sensibles aux valeurs initiales données aux paramètres d'ajustement⁹. La fonction $\chi^2(\{\tau_j\})$ peut en effet présenter des minima locaux, au lieu d'un unique minimum global dans le cas d'un ajustement affine, ce qui complique la procédure de minimisation (Fig. 3(a)).

L'ajustement fournit également une incertitude $\Delta\tau_j$ sur chaque paramètre τ_j [3]. Pour un unique paramètre τ , un développement de Taylor à l'ordre deux au voisinage du paramètre optimal τ^* donne

$$\chi^2(\tau) \simeq \chi^2(\tau^*) + \frac{1}{2}H(\tau - \tau^*)^2 + O((\tau - \tau^*)^3). \quad (16)$$

Le coefficient H détermine la courbure de la parabole osculatrice du χ^2 autour de τ^* (Fig. 3(b)). Il est relié à l'incertitude sur τ^* par $\Delta\tau = \sqrt{2/H}$: plus H est grand, plus le minimum du χ^2 est marqué, et plus l'incertitude sur l'optimum est petite.

8. On retrouvera cet exemple dans l'Exp. VI.1, « Pendule double puits électronique ».

9. Cette discussion ne s'applique qu'aux algorithmes les plus simples. Il existe des méthodes plus avancées (stochastiques par exemple) qui permettent des ajustements non linéaires et/ou à plusieurs variables [7].

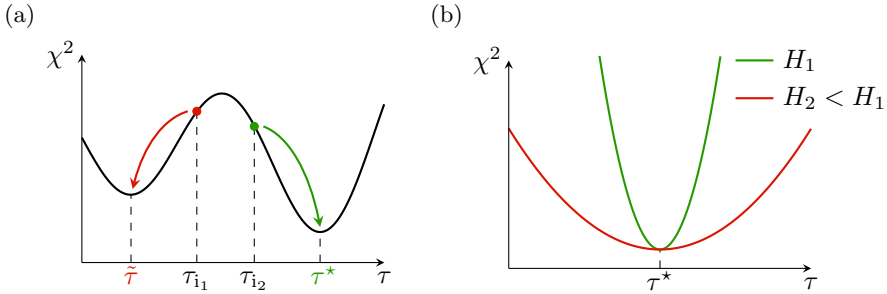


Fig. 3 (a) Illustration de l'importance du choix des valeurs initiales des paramètres d'ajustement. Si la fonction $\chi^2(\tau_j)$ présente des minima locaux, comme $\tilde{\tau}$ sur le schéma, un paramètre initial comme τ_{i1} peut poser un problème d'estimation du paramètre optimal τ^* . (b) Plus la courbure H de l'Éq. (16) est grande, plus le minimum du χ^2 est marqué, et plus l'incertitude $\Delta\tau$ sur le paramètre optimal τ^* est petite. Ces figures représentent ce qu'il se passe pour un unique paramètre τ , mais cette minimisation a lieu dans un espace multidimensionnel.

Lorsque la minimisation fait intervenir plusieurs paramètres τ_i , il est possible de généraliser les résultats précédents à partir de la matrice hessienne du χ^2 .

Un exemple de code **Python** permettant de réaliser des ajustements affines est proposé dans la Réf. [4].

3.2 Test du χ^2

Pour évaluer la qualité d'un ajustement, on peut utiliser le test dit « du χ^2 ». Nous discutons uniquement le cas où $\Delta y_i \gg f'(x_i)\Delta x_i$. On définit le χ^2 réduit par

$$\chi_{\text{red}}^2 = \frac{\chi^2(\tau^*)}{N - P}, \quad (17)$$

où P est le nombre de paramètres τ_j ajustables (2 pour un modèle affine) et N le nombre de points de mesure de la série. Dans le cas où toutes les incertitudes sont identiques et égales à Δy , la grandeur

$$\frac{1}{N - P} \sum_{i=1}^N (y_i - f(x_i; \{\tau_j^*\}))^2 \quad (18)$$

constitue un bon estimateur de la variance σ_{stat}^2 de la distribution des données expérimentales autour du modèle, et alors

$$\chi_{\text{red}}^2 \simeq \left(\frac{\sigma_{\text{stat}}}{\Delta y} \right)^2. \quad (19)$$

Lorsque $\chi_{\text{red}}^2 \ll 1$, les incertitudes expérimentales sont grandes devant l'écart moyen au modèle et sont probablement surévaluées (Fig. 4(a)). Le modèle reproduit les données expérimentales, mais des déviations à la loi proposée risquent de ne pas être visibles (Sec. 2.5). À l'inverse, si $\chi_{\text{red}}^2 \gg 1$, ou bien les incertitudes expérimentales ont été sous-évaluées, ou bien le modèle proposé n'est pas en accord avec les

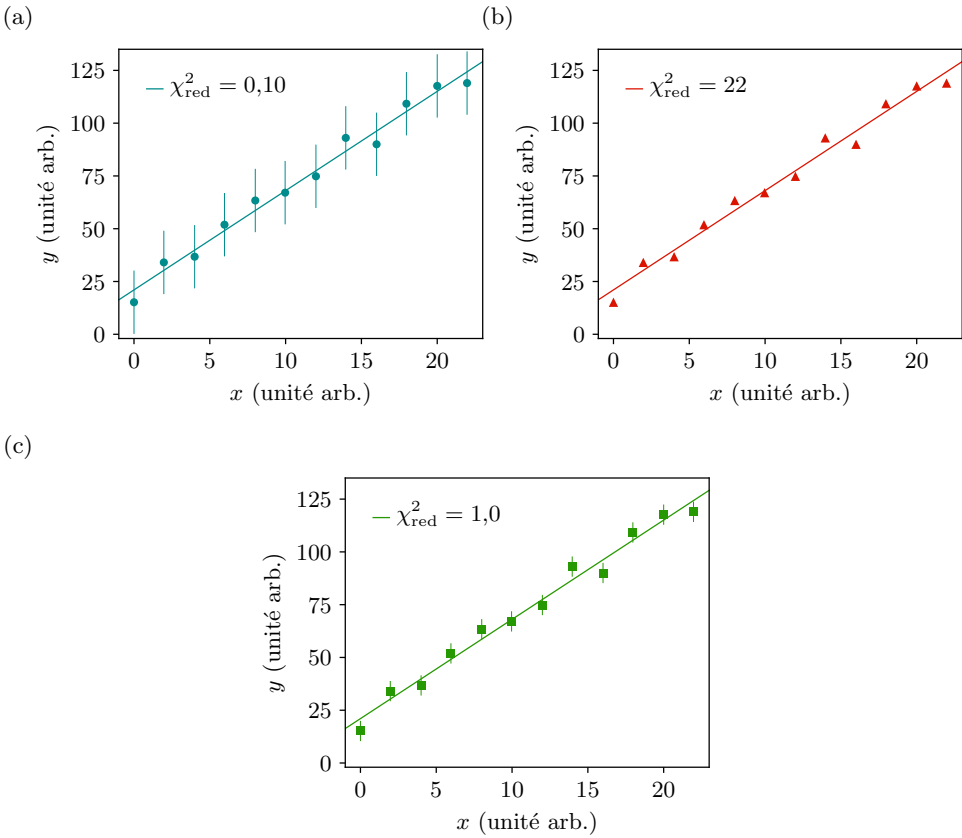


Fig. 4 Illustration du test du χ^2 . (a) Si $\chi_{\text{red}}^2 \ll 1$, les incertitudes sont surévaluées et peuvent cacher des écarts au modèle. (b) Si $\chi_{\text{red}}^2 \gg 1$, le modèle s'écarte fortement des données, ou les incertitudes sont sous-évaluées. (c) Si $\chi_{\text{red}}^2 \simeq 1$, le modèle permet de reproduire raisonnablement les données.

données (Fig. 4(b)). Enfin, pour $\chi_{\text{red}}^2 \simeq 1$, le modèle proposé est acceptable compte tenu des incertitudes (Fig. 4(c)).

3.3 Limites du test du χ^2

Avant d'évaluer aveuglément les données de façon statistique, il est indispensable de faire preuve d'esprit critique. Le quartet d'Anscombe présenté en Fig. 5 fournit un exemple de quatre jeux de données ayant des propriétés statistiques identiques : même moyenne, même médiane, même variance [8]. Le meilleur ajustement obtenu par la méthode des moindres carrés est également identique dans les quatre cas : $y = 0,5x + 2,5$ avec $\chi_{\text{red}}^2 = 1$. Pourtant, seules les données présentées en Fig. 5(a) sont raisonnablement ajustées par la droite proposée. Généralement, lorsque les données révèlent une structure particulière, c'est que le modèle choisi n'est pas le bon (Fig. 5(b)). L'observation simple des données permet aussi de se rendre compte de l'existence d'un point aberrant (Fig. 5(c)) ou isolé (Fig. 5(d)).

De plus, le test du χ^2 ne peut être interprété que si la fonction modèle f dépend



Collectif **Jolidon**

.....

La collection « Enseignement Sup Physique » se présente comme une introduction sur des sujets incontournables en physique. Adaptée aux besoins des étudiants et des chercheurs, le traitement rigoureux, mais accessible, de chaque sujet est idéal pour ceux qui veulent une amorce dans un sujet donné pour les préparer à une étude ou à une recherche plus avancée.

Ce livre regroupe 25 expériences de physique. Pour chacune, les aspects théoriques nécessaires à la compréhension du phénomène physique et l'élaboration du protocole sont détaillés. Des mesures, obtenues en laboratoire d'enseignement, sont présentées et systématiquement comparées aux prédictions théoriques. Un traitement rigoureux des incertitudes permet des discussions riches, allant au-delà des modèles proposés. Des schémas détaillés des dispositifs expérimentaux et des traitements numériques dans le langage libre Python facilitent la reproduction des expériences.

Pensé pour les candidats aux concours du CAPES et de l'agrégation, cet ouvrage s'adresse également aux étudiants de CPGE, de licence et de master, ainsi qu'aux enseignants du secondaire et du supérieur.

Le collectif **Jolidon** est composé de *Éric Brillaux, Benjamin Crinquand, Louisiane Devaud, David Dumont, Camille Eloy, Antoine Essig, Benjamin Guiselin, Christopher Madec, Alexandre Michel, Jérémy Sautel, Théo Sépulcre et Louis Villa.*



Illustration de couverture : Niels Bohr et Wolfgang Pauli jouant avec une toupie tippe-top lors de l'inauguration du nouvel institut de physique à Lund, en Suède (Erik Gustafson, 1954).

29 €

ISBN : 978-2-7598-2364-2



9 782759 823642