



Alain Colin De Verdière, Souren Pogossian

.....

La collection « Enseignement Sup Physique » se présente comme une introduction sur des sujets incontournables en physique. Adaptée aux besoins des étudiants et des chercheurs, le traitement rigoureux, mais accessible, de chaque sujet est idéal pour ceux qui veulent une amorce dans un sujet donné pour les préparer à une étude ou à une recherche plus avancée.



Prise de la Station spatiale internationale, cette vue du glacier Upsala en Patagonie montre toute la richesse des mouvements de l'eau dans ses trois phases, solide, liquide et gazeuse, qui coexistent ici.

Le climat et la transition énergétique, la physique des milieux naturels, de la micro-échelle capillaire à celle de la planète, demandent d'ajouter aux lois de Newton celles de la Thermodynamique de Carnot.

Les thèmes étudiés dans ce tome 2 sont : Rotation de la Terre et forces de Coriolis, Fluides : turbulence, vagues, marées et musique, Thermodynamique : énergie et entropie, moteurs thermiques, climat et transition énergétique, Tension de surface et capillarité, Introduction à la théorie du chaos et attracteurs étranges.

La bonne compréhension du sujet est assurée par la progression naturelle des idées, l'usage de mathématiques élémentaires, des exemples tirés de situations d'actualité et un style clair. Cet ouvrage est autonome avec des questions de réflexion et plus de 200 exercices, la solution desquels est détaillée pour les trois quarts d'entre eux. Une annexe numérique et informatique en ligne permet de trouver les solutions de problèmes complexes (langages Octave ou Matlab).

Ce tome 2 est destiné aux étudiants en deuxième année de licence, IUT ou classes préparatoires.

Alain Colin de Verdière a obtenu un doctorat du Massachusetts Institute of Technology (MIT) et de Woods Hole Oceanographic Institution (WHOI). Ses recherches portent sur la circulation océanique mondiale et les modèles simplifiés océan-atmosphère pour le climat.

Souren Pogossian a obtenu un doctorat de l'université de Brest en réalisant la majeure partie de sa thèse au CNRS de Meudon. Ses recherches concernent la propagation guidée des ondes lumineuses et neutroniques, l'optoélectronique du silicium-germanium, le couplage d'échange en magnétisme et aujourd'hui l'astrodynamique.

ISBN : 978-2-7598-2671-1



9 782759 826711

Mécanique classique

Cours et exercices corrigés

Tome 2

**Repères non inertiels, fluides, thermodynamique,
capillarité, introduction à la théorie du chaos**

Mécanique classique

Cours et exercices corrigés

Tome 2

Repères non inertiels, fluides, thermodynamique,
capillarité, introduction à la théorie du chaos

A. Colin de Verdière et S. Pogossian

Remerciements

O. Arzel, X. Carton, N. Daniault, T. Huck, L. Géli, N. Grima et R. Scott ont accepté de relire certains chapitres et leurs remarques judicieuses ont permis de supprimer des erreurs et d'améliorer le manuscrit. J. Sirven et A. Wirth ont fait une relecture très approfondie du chapitre Thermodynamique qui a permis d'éclaircir plusieurs points délicats. Nous restons bien sûr seuls responsables des erreurs qui pourraient subsister. J. Le Bars a contribué à la frappe de notes initiales du tome 1 et partagé avec patience ses connaissances de traitement de texte.

Les reproductions de figures ont été rendues possibles grâce aux permissions de EDP Sciences, Elsevier, ESA/NASA et Thomas Pesquet, Dover, NASA, National Parks Gallery, Ocean Data Lab (Deolen).

Que tous soient chaleureusement remerciés.

Photographie de couverture : Glacier Upsala en Patagonie.

Crédit : ESA/NASA - Thomas Pesquet

Conception graphique de la couverture : CB Defretin, Lisieux

Imprimé en France

ISBN (papier) : 978-2-7598-2671-1 – ISBN (ebook) : 978-2-7598-2672-8

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés, réservés pour tous pays. La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (alinéa 1^{er} de l'article 40). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du code pénal.

© EDP Sciences, 2022

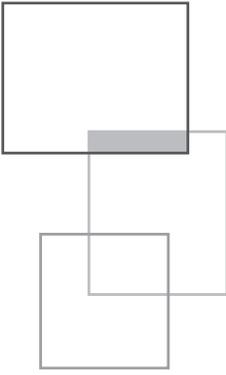


Table des matières

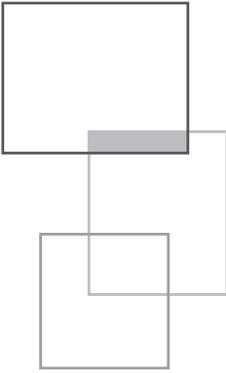
Chapitre 8 • La rotation de la Terre et la force de Coriolis	399
8.1 La force de Coriolis	400
8.2 Applications	405
8.2.1 Nombre de Rossby	405
8.2.2 Le cercle d'inertie	406
8.2.3 Chute libre sur une Terre en rotation	407
8.2.4 Analogie électromagnétique	408
8.2.5 La démonstration de la rotation terrestre : le pendule de Foucault	408
8.2.6 Exercices	411
Chapitre 9 • Mécanique des fluides	413
9.1 Introduction	413
9.2 Les forces dans un fluide	419
9.3 Statique des fluides	423
9.4 Dynamique des fluides	427
9.4.1 Les forces de pression	427
9.4.2 Les forces visqueuses	429
9.4.3 La conservation de la masse	430
9.4.4 La relation de Bernoulli	433
9.4.5 Forces aux frontières	436
9.5 Applications	436
9.5.1 Applications de la relation de Bernoulli	437

9.5.2	Écoulements visqueux de Couette et Poiseuille-Hagen	443
9.5.3	Écoulements atmosphériques	446
9.5.4	Turbulence	449
9.5.5	Ondes dans les fluides	454
9.5.6	Questions de réflexion et concepts	468
9.5.7	Exercices	469
Chapitre 10 • Thermodynamique		483
10.1	Introduction	483
10.2	Chaleur, température et la première loi de la thermodynamique	484
10.2.1	Quelques définitions	484
10.2.2	Le travail	486
10.2.3	La chaleur	489
10.2.4	La température et l'équation d'état des gaz parfaits	492
10.2.5	Gaz réels	496
10.2.6	La première loi de la thermodynamique	501
10.2.7	L'enthalpie	503
10.2.8	Phénomènes de transport	505
10.3	Thermodynamique des gaz parfaits	512
10.3.1	Chaleurs spécifiques	512
10.3.2	Transformation adiabatique réversible d'un gaz parfait	513
10.3.3	Théorie cinétique des gaz	514
10.4	La deuxième loi de la thermodynamique	518
10.4.1	La détente de Joule et la formulation de la deuxième loi	519
10.4.2	L'entropie variable d'état : le cas du gaz parfait	523
10.4.3	Extension : la deuxième loi pour les systèmes fermés	524
10.4.4	Machines thermiques	527
10.4.5	L'entropie variable d'état	534
10.4.6	Variations d'entropie de quelques transformations	535
10.4.7	L'interprétation statistique de l'entropie	537
10.4.8	Les conversions d'énergie possibles	541
10.5	Potentiels thermodynamiques et principes d'extremum	547
10.5.1	Introduction	547
10.5.2	L'identité thermodynamique	548
10.5.3	L'énergie libre de Helmholtz	549
10.5.4	L'énergie libre de Gibbs	552
10.5.5	L'enthalpie	554
10.6	Les énergies disponibles	555
10.6.1	Énergie radiative	555
10.6.2	Bilan d'énergie et d'entropie de la Terre	557

10.6.3	Énergie du vivant	566
10.6.4	Énergie électrique	572
10.6.5	Énergie nucléaire	576
10.7	Les conversions d'énergie	582
10.7.1	Introduction	583
10.7.2	Centrales thermiques	586
10.7.3	La géothermie	590
10.7.4	OTEC : Ocean Thermal Energy Conversion	590
10.7.5	Éoliennes	591
10.7.6	Centrales hydroélectriques	593
10.7.7	Centrales marémotrices	596
10.7.8	Biomasse	596
10.7.9	Le solaire	597
10.7.10	Le système thermodynamique mondial	598
10.7.11	Conclusions	602
10.8	Applications	603
10.8.1	Questions de réflexion et concepts	603
10.8.2	Exercices	604
Chapitre 11 • Tension superficielle et phénomènes capillaires		629
11.1	Introduction	629
11.2	Expériences simples	630
11.3	Origine moléculaire, tension superficielle et énergie de surface	632
11.3.1	Les molécules en surface	632
11.3.2	L'énergie de surface	635
11.3.3	Applications	636
11.4	Relation de Laplace-Young et applications	637
11.4.1	La relation de Laplace-Young	637
11.4.2	Montée dans un tube capillaire	640
11.5	Phénomènes de mouillage	642
11.6	Insectes et capillarité	646
11.7	Applications	648
11.7.1	Questions de réflexion et concepts	648
11.7.2	Exercices	650
Chapitre 12 • Systèmes dynamiques		657
12.1	Introduction	657
12.2	Systèmes différentiels de dimension 1	663
12.2.1	Stabilité	663
12.2.2	Existence et unicité	663

12.2.3 Exemples	664
12.2.4 Bifurcations	666
12.3 Systèmes différentiels de dimension 2	669
12.3.1 Système linéaire	669
12.3.2 Système non linéaire	671
12.4 Systèmes différentiels de dimension 3	679
12.4.1 Le système de Lorenz	679
12.5 Équations aux différences	685
12.5.1 Points fixes et toiles d'araignées	685
12.5.2 L'équation logistique	686
12.6 Conclusion	691
12.7 Exercices	691
Références Tome 2	699
Constantes physiques fondamentales et valeurs utiles	705
Corrections des exercices du tome 2	709
Index général tomes 1 et 2	793

Une annexe numérique et informatique est disponible en ligne en libre accès sur la boutique en ligne de l'éditeur : <https://laboutique.edpsciences.fr/>



Chapitre 8

La rotation de la Terre et la force de Coriolis

Pour un physicien observant les résultats d'expériences, la rotation de la Terre pose problème puisque le référentiel terrestre n'étant pas inertiel, on ne peut pas y appliquer la 2^e loi de Newton. L'objectif est ici de voir comment cette 2^e loi doit être modifiée lorsque le référentiel est en rotation solide. Pour autant, la 2^e loi est utilisée telle quelle en permanence ! Cela veut sans doute dire que les modifications cherchées ne sont pas très importantes. Pourtant, la Terre tourne vite : à l'équateur, le point le plus éloigné de l'axe de rotation de la Terre, la vitesse vaut $\Omega R_T \approx 466 \text{ m s}^{-1}$ avec R_T le rayon terrestre $\approx 6\,370 \text{ km}$ et $\Omega = 7,292 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$. On découvrira ici que ces modifications sont effectivement négligeables aux échelles de temps courtes devant la période de rotation terrestre mais peuvent devenir très importantes sur des échelles de temps suffisamment longues. Et la rotation terrestre devient centrale pour les mouvements des dépressions de l'atmosphère et de la circulation océanique induisant une dynamique complètement nouvelle. On a déjà vu au chapitre 7 un effet de la rotation qui a un peu déformé la Terre en aplatissant les pôles et en induisant une gravité effective qui n'est plus radiale. Y a-t-il autre chose ?

8.1 La force de Coriolis

La façon la plus directe de voir les nouveaux effets est de considérer une particule libre dans un repère inertiel. Les modifications qui apparaissent sont assez complexes à présenter alors que leur cause est pourtant très simple : il s'agit simplement d'un changement de référentiel comme la figure 8.1 l'explique.

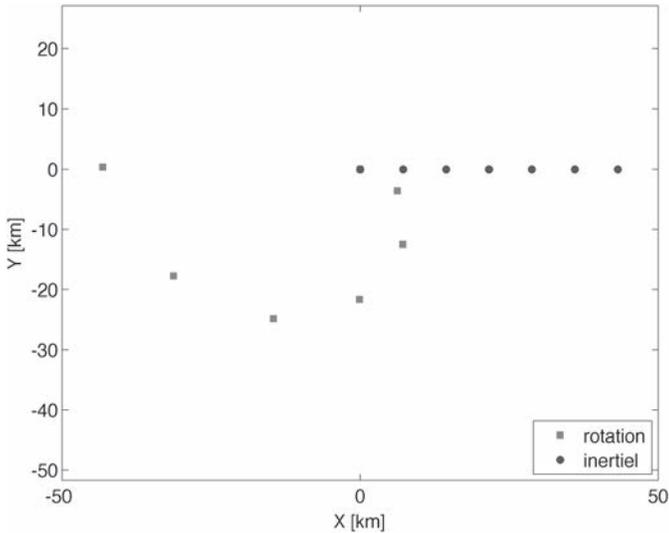


Figure 8.1

Supprimons la gravité et imaginons une particule qui part du pôle Nord avec une vitesse horizontale $U = 1 \text{ m s}^{-1}$. Comme elle n'est soumise à aucune force, l'observateur dans un référentiel inertiel la voit continuer sa route en ligne droite à *vitesse constante* dans l'espace. Elle part de l'origine $x = 0, y = 0$ et sa position est indiquée par les points ronds toutes les 2 heures. Maintenant le terrien qui tourne à la vitesse angulaire de la Terre, voit la même particule sur une trajectoire très différente (les points carrés également toutes les 2 heures).

Une particule libre (qui n'est soumise à aucune force) part du pôle Nord en ligne droite à vitesse constante (1 m s^{-1}) pour un observateur dans un référentiel inertiel (sans accélération). La particule a été lâchée de l'origine prise sur l'axe de rotation à $t = 0$. L'autre trajectoire en forme de spirale est la trajectoire de cette même particule observée dans le référentiel terrestre. Le vecteur rotation Ω , perpendiculaire à la figure, pointe vers le lecteur et le référentiel tourne dans le sens positif (le sens contraire aux aiguilles d'une montre).

Pour l'observateur immobile sur la terre, la particule de la figure 8.1 est déviée sur la droite et a complètement rebroussé chemin au bout de 12 h pour se retrouver une quarantaine de km de l'autre côté du point de départ. L'effet de la rotation de la Terre sur un corps en mouvement semble donc très important. Pour le comprendre, considérons le diagramme des vitesses de la figure 8.2.

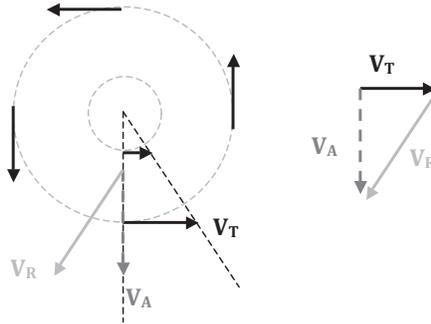


Figure 8.2

À une certaine distance du pôle Nord, un point sur la Terre tourne avec les vitesses indiquées par les flèches noires. La particule libre qui vient du pôle Nord se déplace en ligne droite avec la vitesse en pointillé gris. En revanche pour un observateur terrestre, la construction de droite montre que la particule se déplace sur la droite avec la vitesse en gris clair.

Lorsque la particule se déplace avec la vitesse constante V_A , un observateur sur la terre se déplace avec la vitesse V_T . Pour trouver la vitesse relative V_R de la particule vue par cet observateur terrestre, on utilise l'addition des vecteurs :

$$V_A = V_T + V_R$$

et donc :

$$V_R = V_A - V_T$$

La construction graphique sur la droite de la figure 8.2 montre cette soustraction qui explique l'orientation du vecteur V_R sur la droite de V_A . Plus la particule s'éloigne du pôle, plus la vitesse de rotation de la terre V_T est grande et plus la déviation sera importante. Les déplacements de la particule sur la figure 8.1 ne sont que la somme des déplacements élémentaires de la particule $V_R \Delta t$ durant chaque intervalle de temps Δt .

Si la particule se déplace sur cette sorte de spirale de la figure 8.1, cela signifie qu'elle a une accélération et donc que des forces apparaissent dans le repère en rotation. La 2^e loi de Newton qui ne s'applique que dans des référentiels inertiels doit donc être modifiée. Comme il n'y a aucune force dans le repère inertiel, on comprend que c'est la place de l'observateur dans le référentiel en rotation qui est la cause de ces forces, des pseudo-forces uniquement dues au choix du référentiel tournant.

Maintenant si les positions des points de la spirale sont connues en fonction du temps, on peut avoir accès aux pseudo-forces en dérivant les positions deux fois par rapport au temps. Si on connaît la position d'un point $P(x, y)$ dans un repère inertiel Oxy , le premier objectif est donc de trouver les coordonnées de ce même

point P dans le repère tournant. Supposons que le repère tournant $Ox'y'$ ait tourné d'un certain angle θ :

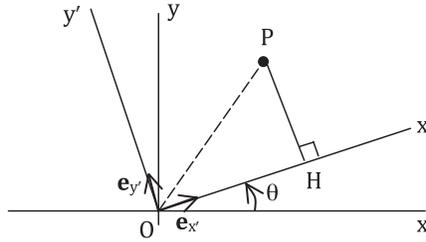


Figure 8.3

Le repère $Ox'y'$ est en rotation (autour d'un axe perpendiculaire à cette page) par rapport au repère inertiel fixe Oxy . Quelles sont les coordonnées du point P dans le repère tournant ?

Dans le repère inertiel $\mathbf{OP} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$. L'abscisse x' de P est tout simplement OH où H est la projection orthogonale de P sur Ox' . Ainsi si $\mathbf{e}_{x'}$ est le vecteur unitaire selon Ox' :

$$x' = \mathbf{OP} \cdot \mathbf{e}_{x'}$$

Les coordonnées de $\mathbf{e}_{x'}$ dans le repère Oxy sont de même les projections orthogonales de $\mathbf{e}_{x'}$ sur Ox et Oy à savoir $\cos \theta$ et $\sin \theta$ respectivement. On peut alors écrire :
 $x' = (x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y) \cdot \mathbf{e}_{x'} = x\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_{x'} + y\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_{x'} = x \cos \theta + y \cos(\pi/2 - \theta) = x \cos \theta + y \sin \theta$
 Et de même :

$y' = \mathbf{OP} \cdot \mathbf{e}_{y'} = (x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y) \cdot \mathbf{e}_{y'} = x\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_{y'} + y\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_{y'} = x \cos(\pi/2 + \theta) + y \cos \theta = -x \sin \theta + y \cos \theta$. Le changement de coordonnées du système inertiel au système en rotation est donc :

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$y' = -x \sin \theta + y \cos \theta$$

Maintenant que l'on sait obtenir les coordonnées d'un point dans un référentiel $x'y'$ tourné d'un angle θ par rapport à un autre, on voit immédiatement que l'on sait obtenir les coordonnées dans un repère en rotation solide à la vitesse angulaire Ω dont l'axe z est perpendiculaire au plan xy . On peut choisir l'origine des angles telle que :

$$\theta = \Omega t$$

et l'on a :

$$\begin{cases} x' = x \cos \Omega t + y \sin \Omega t \\ y' = -x \sin \Omega t + y \cos \Omega t \\ z' = z \end{cases} \quad 8-1$$

Les coordonnées dans la direction z de l'axe de rotation ne changent évidemment pas. Cette formule de changement de coordonnées est la seule chose dont nous ayons besoin pour relier les points d'une trajectoire dans un repère inertiel et dans un repère tournant. Si la trajectoire de la particule libre dans le repère inertiel est :

$$\begin{aligned}x &= ut \\y &= 0 \\z &= 0\end{aligned}$$

où l'on a choisi $\mathbf{x} = 0$ à $t = 0$ par simplicité, en injectant dans 8-1 la trajectoire dans le repère tournant est :

$$\begin{aligned}x' &= ut \cos \Omega t \\y' &= -ut \sin \Omega t \\z' &= 0\end{aligned} \tag{8-2}$$

L'équation en coordonnées polaires r', θ montre que la trajectoire est une spirale d'Archimède :

$$\begin{aligned}r' &= |u|t \\ \theta &= -\Omega t \Rightarrow r'(\theta) = -\frac{|u|}{\Omega} \theta\end{aligned}$$

Ce sont les forces qui nous intéressent. Dans le repère inertiel aucune puisque $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2} = 0 = 0$. Dans le repère en rotation, la vitesse vaut :

$$\begin{cases} \frac{dx'}{dt} = u \cos \Omega t - u \Omega t \sin \Omega t \\ \frac{dy'}{dt} = -u \sin \Omega t - u \Omega t \cos \Omega t \\ \frac{dz'}{dt} = 0 \end{cases} \tag{8-3}$$

et l'accélération :

$$\begin{cases} \frac{d^2x'}{dt^2} = -2u \Omega \sin \Omega t - ut \Omega^2 \cos \Omega t \\ \frac{d^2y'}{dt^2} = -2u \Omega \sin \Omega t + ut \Omega^2 \sin \Omega t \\ \frac{d^2z'}{dt^2} = 0 \end{cases} \tag{8-4}$$

Des accélérations et donc des forces apparaissent sauf dans la direction z' (parallèle à $\mathbf{\Omega}$). Cette expression 8-4 n'est pas très intuitive et on aimerait retrouver par exemple l'accélération centrifuge qui ne dépend que de la position par rapport à l'axe de rotation (ici l'origine). Pour cela il faut éliminer le temps dans 8-4 et obtenir une expression qui ne dépende plus que des positions et vitesses instantanées.

On voit que 8-3 peut s'écrire :

$$\begin{aligned} u \cos \Omega t &= \dot{x}' - \Omega y' \\ -u \sin \Omega t &= \dot{y}' + \Omega x' \end{aligned} \quad 8-5$$

Où $u \cos \Omega t$ et $-u \sin \Omega t$ à gauche sont les composantes de la vitesse inertielle \mathbf{v} exprimées dans le repère $Ox'y'$, de sorte que 8-5 se réécrit avec le produit vectoriel :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}' \quad 8-6$$

et si grâce à 8-5 on substitue les termes en $u \cos \Omega t$ et $u \sin \Omega t$ dans 8-4, on obtient la relation cherchée valable pour tout t :

$$\begin{cases} \frac{d^2 x'}{dt^2} - 2\Omega \frac{dy'}{dt} - \Omega^2 x' = 0 \\ \frac{d^2 y'}{dt^2} + 2\Omega \frac{dx'}{dt} - \Omega^2 y' = 0 \\ \frac{d^2 z'}{dt^2} = 0 \end{cases} \quad 8-7$$

Le troisième terme est familier : ce n'est pas autre chose que l'accélération centripète $-\Omega^2 \mathbf{R}'$ car \mathbf{R}' est en effet la projection du vecteur position \mathbf{r}' sur la perpendiculaire au vecteur $\boldsymbol{\Omega}$. Le deuxième terme de composantes $\begin{pmatrix} -2\Omega dy'/dt \\ +2\Omega dx'/dt \\ 0 \end{pmatrix}$ est nouveau.

Sous forme vectorielle avec \mathbf{v}' la vitesse de la particule dans le repère en rotation et le vecteur rotation $\boldsymbol{\Omega} = (0, 0, \Omega)$, ce terme se réécrit avec l'aide du produit vectoriel comme $2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}'$, l'accélération de Coriolis. Si on fait passer ces deux termes à droite dans l'expression 8-7, deux forces apparaissent pour une particule de masse m dans un repère en rotation :

$$m \mathbf{a}' = \underbrace{-2\boldsymbol{\Omega} \times m\mathbf{v}'}_{\text{Force de Coriolis}} + \underbrace{m\Omega^2 \mathbf{R}'}_{\text{Force centrifuge}} \quad 8-8$$

La première est la force de Coriolis, la deuxième la force centrifuge. La figure suivante montre la direction de la force de Coriolis :

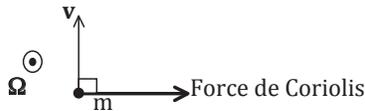


Figure 8.4

Propriétés de la force de Coriolis :

(i) Dès qu'il existe un mouvement dans le repère en rotation, apparaît une force perpendiculaire à \mathbf{v}' et sur la droite de \mathbf{v}' lorsque $\boldsymbol{\Omega}$ pointe vers le lecteur. Elle est

responsable de la déviation à droite de la trajectoire sur la figure 8.1 alors que la force centrifuge « écarte » la particule de l'origine.

(ii) Des propriétés du produit vectoriel, on déduit que si \mathbf{v}' est parallèle à $\boldsymbol{\Omega}$, la force est nulle, la raison pour laquelle il n'y a aucun terme dans la direction z' sur 8-7.

(iii) Comme la force de Coriolis est perpendiculaire à \mathbf{v}' , son travail est nul et elle ne change pas l'énergie cinétique d'un corps.

Toute cette « dérivation » a été faite pour une particule libre, non accélérée, dans un repère inertiel Oxy. Que se passe-t-il lorsque la particule est soumise à des forces \mathbf{F} et qu'elle possède une accélération \mathbf{a} dans le repère inertiel ? Comme l'expression 8-7 est instantanée, on voit qu'il y aura un seul terme supplémentaire, l'accélération propre de la particule et 8-7 se réécrit vectoriellement :

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}' - \Omega^2 \mathbf{R}' \quad 8-9$$

Les deux expressions 8-6 et 8-9 donnent la transformation des vitesses et des accélérations quand on passe d'un repère inertiel à un repère en rotation (les variables avec des primes). L'accélération dans le repère inertiel \mathbf{a} induite par des forces \mathbf{F} cause des accélérations relatives \mathbf{a}' dues aux forces \mathbf{F} mais également d'autres dues aux pseudo-forces de sorte que 8-8 se généralise à :

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} - 2\boldsymbol{\Omega} \times m\mathbf{v}' + m\Omega^2 \mathbf{R}' \quad 8-10$$

Si on réécrit 8-10 en séparant le poids $m\mathbf{g}$ des autres forces, on fait apparaître la gravité effective \mathbf{g}_e :

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_e &= \mathbf{g} + \Omega^2 \mathbf{R}' \\ m\mathbf{a}' &= -2\boldsymbol{\Omega} \times m\mathbf{v}' + m\mathbf{g}_e + \hat{\mathbf{F}} \end{aligned} \quad 8-11$$

$\hat{\mathbf{F}}$ représentant les forces autres que le poids. La relation 8-11 montre que la dynamique étudiée dans un référentiel en rotation fait intervenir essentiellement ce nouveau terme de Coriolis qui vient modifier profondément la dynamique.

8.2 Applications

8.2.1 Nombre de Rossby

Pour savoir s'il faut prendre en compte ces effets de la rotation terrestre, la première chose à faire est de comparer l'accélération d'une particule a' sur la terre et l'accélération de Coriolis. Si la vitesse d'une particule change de 0 à U sur un temps T et une distance L , a' est d'ordre $U/T = U^2/L$ avec $T = L/U$. Le rapport de a' et de l'accélération de Coriolis $2\Omega U$ est donc de l'ordre de :

$$R_0 = \frac{U^2 / L}{2\Omega U} = \frac{U}{2\Omega L}$$

Mais on peut aussi écrire :

$$R_0 = \frac{1}{2\Omega T} = \frac{T_{1 \text{ jour}}}{4\pi T} = \frac{T_{1,9 \text{ heures}}}{T}$$

Ceci montre que pour des mouvements d'échelle spatiale suffisamment grande ou d'échelle temporelle supérieure à quelques heures, R_0 peut devenir inférieur à 1, auquel cas l'accélération de Coriolis devient prédominante. R_0 est le nombre de Rossby (du nom du météorologiste suédois du milieu du xx^e siècle, un des fondateurs de la météorologie dynamique). Pour les mouvements de la vie ordinaire, R_0 est très grand et la force de Coriolis est donc négligeable. Pour l'écoulement de l'eau de vidange d'un lavabo, $U = 0,1 \text{ m s}^{-1}$, $L = 0,5 \text{ m}$, $R_0 = 2 \cdot 10^3$, et on conclura que la rotation de la Terre n'a aucun effet sur le sens du tourbillon de vidange d'un lavabo. Par contre, pour des mouvements atmosphériques qui ont des vitesses $U \sim 10 \text{ m s}^{-1}$ et des échelles $L \sim 1\,000 \text{ km}$ typiques des dépressions des latitudes tempérées, $R_0 = 0,1$. La force de Coriolis domine les accélérations relatives sur ces grandes échelles spatiales. Les modifications qui interviennent dans la mécanique des fluides d'une Terre en rotation seront discutées au chapitre 9.

8.2.2 Le cercle d'inertie

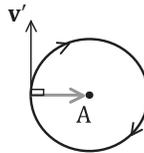


Figure 8.5

La force de Coriolis est en gris sur la figure.

Considérons un lac gelé au pôle Nord. On lance un palet de hockey sur la glace. Si on néglige le frottement sur la glace, le poids du palet est équilibré par la réaction normale à la surface et donc la force de Coriolis devient la seule force horizontale. Comme elle est perpendiculaire à la vitesse et à droite, la force de Coriolis est centripète et donc $\frac{v'^2}{r} = 2\Omega v'$ dans la direction du centre de la trajectoire A. Dans la direction tangentielle $\frac{dv'}{dt} = 0$ et v' est constant. La trajectoire du palet est donc un

cercle de rayon $r = v'/2\Omega$ et la trajectoire s'effectue dans le sens des aiguilles d'une montre. Imaginons que ce palet soit lancé à 50 km/h , il exécutera alors un cercle dit « inertiel » de rayon proche de 100 km . Voilà l'une des originalités des effets de la rotation de la Terre. Si la trajectoire d'un palet au pôle Nord est d'un intérêt

somme tout limité, mentionnons que ces mouvements inertiels s'observent aussi

dans l'océan. Les trajectoires de bouées de surface montrent souvent des boucles inertielles après un coup de vent. L'exercice 7 donne la solution du cercle d'inertie pour une latitude quelconque.

8.2.3 Chute libre sur une Terre en rotation

Depuis Laplace on cherchait une expérience de laboratoire pour prouver la rotation de la Terre. Au milieu du XIX^e siècle, des expériences de chute libre ont eu lieu pour déceler ces petites déviations de la verticale du fil à plomb causées par la rotation. La chute libre d'un caillou dans un puits de mine a été observé en Allemagne en 1832 (voir exercice 4). Plaçons-nous à l'équateur pour simplifier.

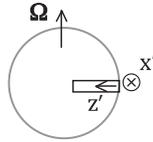


Figure 8.6

Le puits est orienté sur la verticale locale et le caillou est sans vitesse initiale ($\mathbf{v}' = 0$). Le mouvement sur la verticale (axe z) est peu influencé par la force de Coriolis et donc $v'_z \approx gt$. Dans la direction x' on a alors :

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = 2\Omega v'_z = 2\Omega gt$$

soit :

$$x' = \frac{1}{3} \Omega gt^3$$

Comme le déplacement vertical $z' \approx \frac{1}{2} gt^2$, on peut éliminer t pour obtenir :

$$x' = \frac{2^{3/2}\Omega}{3\sqrt{g}} z'^{3/2}$$

Le déplacement est vers l'est ($x' > 0$). Il faudra vérifier *a posteriori* que l'approximation faite dans la direction z' ($2\Omega dx'/dt \ll g$) est correcte. On peut aussi voir ce problème dans le repère inertiel. Comme la force est centrale, la particule conserve son moment cinétique « $m R^2 \omega$ » avec ω la vitesse angulaire autour du centre de la terre. La distance à l'axe de rotation R diminue lors de la chute et donc la vitesse angulaire ω augmente. Le caillou tourne plus vite que la Terre et tombe à l'est de la verticale locale.

8.2.4 Analogie électromagnétique

Le mouvement d'une charge électrique q dans les champs électriques \mathbf{E} et magnétiques \mathbf{B} uniformes est gouverné par :

$$m\mathbf{a} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} + q\mathbf{E}$$

soit

$$\mathbf{a} = -\frac{q}{m}\mathbf{B} \times \mathbf{v} + \frac{q}{m}\mathbf{E}$$

En comparant avec l'accélération 8-11 pour la chute libre dans un repère non inertiel :

$$\mathbf{a}' = -2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}' + \mathbf{g}_e$$

l'analogie apparaît directement en faisant les correspondances :

$$\boldsymbol{\Omega} \rightarrow \frac{q}{2m}\mathbf{B} \text{ et } \mathbf{g}_e \rightarrow \frac{q}{m}\mathbf{E}$$

Les équations qui gouvernent la chute libre (à \mathbf{g}_e constant) sur une Terre en rotation uniforme sont donc les mêmes que celles qui gouvernent l'accélération d'une particule élémentaire dans un cyclotron.

8.2.5 La démonstration de la rotation terrestre : le pendule de Foucault

Les expériences prouvant la rotation de la Terre à l'échelle du laboratoire ne sont pas légion car l'effet étant faible, elles sont difficiles à réaliser. La plus concluante fut réalisée par Foucault qui observa en 1851 la déviation au fil des heures du plan d'oscillation d'un pendule simple. Le pendule fut ensuite installé au plafond du Panthéon pour une démonstration publique reprise dans de nombreux pays (voir Sommeria, 2017 pour une revue des expériences de Foucault). Sachant calculer les forces de Coriolis, on va pouvoir vérifier que cette déviation dépend bien du sinus de la latitude.

La tradition en météorologie et en océanographie est de prendre le repère terrestre local Ox vers l'est, Oy vers le nord, et Oz vers le haut selon la verticale locale. Pour exprimer l'accélération de Coriolis, calculons le produit vectoriel $2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}$:

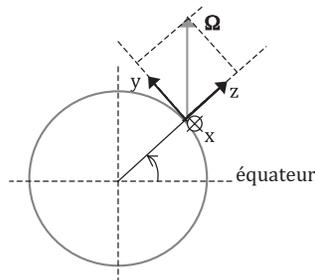


Figure 8.7

poids · I-9, I-88, I-94, I-96–98, I-241
 point
 – fixe · I-255, II-659–674, II-677–679, II-681–682, II-684–688
 – triple · II-493–494
 Poiseuille-Hagen (écoulement) · II-445
 pompe à chaleur · II-531–532
 portance · II-438–442
 portrait de phase (exemples) · II-671–672, II-674, II-682
 potentiel
 – force dérivant d'un potentiel · I-126
 – potentiel thermodynamique · II-547–554
 pression
 – hydrostatique · II-423
 – osmotique · II-642
 prévision · I-11, I-202, II-683–684
 principe
 – d'action et réaction · I-90–91, I-186–187, I-239
 – d'inertie · I-84–85
 processus (voir transformation)
 produit de vecteurs
 – scalaire · I-24–25
 – vectoriel · I-25–26
 proton · I-279, II-577, II-706
 puissance · I-124
 pulsation · I-103

Q

quantité de mouvement · I-87, I-185–187, I-190–192, II-515

R

radioactivité
 – défaut de masse · II-579
 – demi-vie · II-579
 rayonnement
 – infrarouge · II-557–561, II-563–565
 – solaire · II-556, II-596–597

réacteur nucléaire · II-585–587
 réaction
 – chimique · II-566, II-569, II-577
 – nucléaire · II-581–582
 – propulsion à · I-194–195
 référentiel
 – inertiel · I-85–87, II-400
 – terrestre · I-86, I-260, II-399–400, II-408
 réfrigérateurs · II-531
 relation de
 – Bernoulli · II-433–435
 – Laplace-Young · II-637–639
 – Stefan-Boltzmann · II-557
 rendement (moteur thermique) · II-530, II-533
 réservoir · II-490
 résonance · I-208–212
 ressort · I-102–105, I-130–131
 résultante des forces · I-149–150
 rétroaction (*feedback*) · II-600
 réversibilité · I-159, I-202, II-486
 rotation · I-59–61, I-260–262, I-280, II-399–411, II-438–439, II-447–450

S

salinité · II-510–511
 scaling · II-414–416
 sensibilité aux conditions initiales (SCI) · I-84, I-203, II-683–684
 sensibilité du climat · II-600
 séparation de couches limites · II-435, II-442
 sismographe · I-208–210
 solaire (conversion d'énergie) · II-597–598
 soleil · I-235–238, I-280, II-556–558, II-585, II-597–598
 son (vitesse) · II-432, II-459–462
 standards · I-13
 Stirling (approximation de) · II-540

- système
 - de Lorenz · II-679–683
 - dynamique · II-657
 - fermé - ouvert · II-485
 - isolé · I-186–187, II-484–485
 - thermodynamique · II-486

T

- température
 - Celsius · II-493–494
 - critique · II-497–498, II-500
 - d'émission · II-557, II-559–561
 - Kelvin · II-493–494
- temps
 - flèche · I-202, II-518
 - mesure · I-13
- tension
 - sur un solide · I-160–161
 - superficielle · II-629–632
- théorème
 - du calcul différentiel · I-31–32
 - de Carnot · II-534
- théorie (cinétique des gaz) · II-513–514, II-517
- thermomètre
 - gaz · II-492–494
 - mercure · I-237, I-258, II-491–493
- toile d'araignées · II-687
- traînée · II-440–442
- transformation
 - adiabatique · II-513–514
 - galiléenne · I-65–66
 - irréversible · II-487, II-520–522
 - isotherme · II-521–522
 - réversible · II-520–522
- translation · I-65–66, I-110, I-150, II-516–517
- transport (phénomènes de) · II-505
- travail
 - d'une force · I-120–124
 - fait par un gaz · II-487–488
- tritium · II-577

- troposphère · II-559
- tube
 - capillaire · II-493, II-640–641
 - convergent – divergent · II-435
- turbine · II-572, II-575, II-586, II-593–594
- turbulence · II-418, II-449–454

U

- unités · I-12–14
 - conversion · I-16
 - masse atomique · II-577
 - Système international, SI · I-13
- uranium · II-580–582, II-585

V

- van der Waals · II-496–500
 - vapeur · I-280, II-492, II-496, II-499–500, II-586–587
 - vecteurs
 - addition - soustraction · I-17–20
 - produit scalaire · I-24–25
 - produit vectoriel · I-25–26
 - vibrations · I-208, I-215
 - viscosité cinématique · II-422
 - vitesse
 - angulaire · I-56, I-59, I-73–74, I-280, II-399–402
 - d'échappement · I-243, I-245, I-258
 - de groupe · II-466–468
 - de la lumière · I-8, I-280, II-705
 - de phase · II-455–459, II-461–462
 - moyenne · I-49, I-51, II-515–516
 - scalaire · I-50–51
 - vectorielle · I-51
 - volume
 - molaire · II-495
 - spécifique · II-495
- ## W
- watt · I-124