

**LE MONDE DES DONNÉES**



**SFDS**

# **C**OMMENT ÊTRE ÉLU À TOUS LES COUPS ?

*Petit guide mathématique  
des modes de scrutin*

---

**Jean-Baptiste Aubin**

**Antoine Rolland**

Préface d'Étienne Ghys

**edp sciences**

# COMMENT ÊTRE ÉLU À TOUS LES COUPS ?

*Petit guide mathématique des modes de scrutin*

Aux urnes, citoyens ! Formez vos évaluations !

Nous votons mais sans jamais pouvoir choisir la procédure de vote en elle-même. La façon d'élire nos représentants est pourtant capitale : scrutins à la proportionnelle, majoritaire à un ou deux tours... les modes de scrutin sont aujourd'hui l'outil incontournable de nos démocraties représentatives, mais rarement étudiés et encore moins remis en cause. Entre autres faits déconcertants, ce livre est l'occasion de nous rendre compte que le choix du mode de scrutin influe plus souvent que nous l'imaginons sur le vainqueur de l'élection ; un exemple d'élection à cinq candidats, où chacun peut être élu suivant le mode de scrutin choisi, achèvera de nous convaincre de l'importance de cette question. Une surprise en entraînant une autre, nous nous rendrons compte que notre scrutin majoritaire à deux tours est particulièrement imparfait. Il souffre de nombreux défauts, tant au niveau mathématique qu'au niveau politique et sociétal. Après avoir (re)découvert quelques autres modes de scrutin et leurs propriétés, il apparaîtra que ceux basés sur les évaluations des candidats sont plus riches, plus justes, plus dignes de nos sociétés dont la maturité démocratique n'a jamais été si grande.

Suivez les auteurs dans une visite guidée du monde fascinant des modes de scrutin et de leurs propriétés et faites-vous, vous aussi, un avis éclairé sur cette question si cruciale pour nos démocraties !

*Jean-Baptiste Aubin, maître de conférences en statistique à l'INSA Lyon et à l'Institut Camille Jordan, est passionné de médiation scientifique. Il a été directeur de la Maison des mathématiques et de l'informatique de Lyon.*

*Antoine Rolland, maître de conférences en statistique à l'université Lyon 2, est membre du comité de rédaction de la revue « Statistique et Société » et s'intéresse à la manière dont la statistique contribue à l'étude et à la compréhension de problématiques sociétales.*

Prix : 22 €

ISBN : 978-2-7598-2684-1



9 782759 826841

La Société Française de Statistique (SFdS), association reconnue d'utilité publique, a pour objectif de favoriser les développements de la statistique et d'assurer la représentation de l'ensemble des utilisateurs, enseignants et chercheurs dans ce domaine. La collection « Le monde des données » a pour ambition de proposer des ouvrages accessibles à un très large public, témoignant ainsi de sa volonté de s'ouvrir davantage vers la société civile.

SFdS

edp sciences  
www.edpsciences.org

**Comment être élu à tous les coups ?**

---



# **Comment être élu à tous les coups ?**

## **Petit guide mathématique des modes de scrutin**

---

Jean-Baptiste Aubin et Antoine Rolland

Préface d'Étienne Ghys

### **Dans la même collection**

Droesbeke J.-J. et Vermandele C. (2018), Histoire(s) de(s) données numériques. ISBN : 978-2-7598-2201-0

Le Gléau J.-P. (2019), Le secret statistique. ISBN : 978-2-7598-2332-1

Pont-Neuf (2019), Le nombre et la cité. ISBN : 978-2-7598-2374-1

Couverture : Conception graphique de B. Defretin, Lisieux

Illustrations d'Adrien Tolédano - Studio neige noire

Imprimé en France

ISBN (papier) : 978-2-7598-2684-1

ISBN (ebook) : 978-2-7598-2685-8

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés, réservés pour tous pays. La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (alinéa 1<sup>er</sup> de l'article 40). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du code pénal.

© EDP Sciences, 2022

À Bertrand Russell,  
*pour avoir dit « The world is full of magical things  
patiently waiting for our wits to grow sharper. »*<sup>1</sup>

Jean-Baptiste Aubin

À Patrice Perny,  
*pour ses cours lumineux sur le théorème d'Arrow,  
point de départ de mon intérêt pour les modes de scrutin.*

Antoine Rolland

---

1. Le monde est rempli de choses magiques attendant patiemment que nos esprits s'aiguisent.



# SOMMAIRE

---

<i>Préface</i> .....	9
<i>Avant-propos</i> .....	13
<b>1 De la démocratie</b> .....	15
1.1 Introduction .....	15
1.2 Vivre et choisir ensemble : une brève histoire de la démocratie .....	18
1.3 La démocratie ici et maintenant : un bilan mitigé.....	21
1.4 Quelques pistes pour la démocratie de demain .....	23
1.5 Qu'est-ce qu'un mode de scrutin uninominal ?.....	25
<b>2 Des propriétés des modes de scrutin uninominaux</b> .....	31
2.1 Des propriétés à vérifier pour un bon mode de scrutin .....	31
2.2 Unanimité.....	33
2.3 Anonymat.....	34
2.4 Universalité .....	36
2.5 Le vainqueur et le perdant de Condorcet .....	38
2.6 Monotonie .....	42
2.7 Consistance aux rassemblements.....	44
2.8 Incitation à la participation.....	47
2.9 Indépendance vis-à-vis des autres candidats.....	48
2.10 Synthèse.....	51
<b>3 Des modes de scrutins uninominaux classiques et de leurs limites</b> .....	55
3.1 Scrutin majoritaire à un tour (SM1T) .....	57
3.2 Scrutin majoritaire à deux tours (SM2T) .....	59
3.3 Vote par éliminations successives .....	61
3.4 Méthode de Bucklin .....	63
3.5 Scrutin de Borda .....	65
3.6 Procédure de Nanson .....	68
3.7 Procédure Minimax .....	71
3.8 Procédure de Copeland .....	73
3.9 Procédure de Kemeny .....	75
3.10 Quelle méthode choisir ? .....	78
3.11 Théorème d'impossibilité d'Arrow .....	83
3.12 Paradoxe du vote stratégique .....	85

<b>4 Des modes de scrutin uninominaux par évaluation</b> .....	89
4.1 Évaluer plutôt que voter .....	89
4.2 Comment agréger les évaluations obtenues ? .....	91
4.3 Le vote à la moyenne (ou range voting) .....	97
4.4 Le vote à la médiane (ou jugement majoritaire) .....	103
4.5 Le vote par approbation .....	108
4.6 Synthèse.....	111
<b>5 Des modes de scrutins de liste</b> .....	115
5.1 La proportionnelle .....	115
5.2 La méthode au plus fort reste .....	119
5.3 Les méthodes à la plus forte moyenne.....	122
5.4 Union ou scission ? .....	125
5.5 Les effets de seuils .....	128
5.6 La double proportionnelle.....	129
5.7 Un indice de pouvoir .....	133
5.8 Les circonscriptions .....	137
5.9 Synthèse.....	145
<b>6 Conclusion</b> .....	147
6.1 Que retenir ?.....	147
6.2 Quelques lectures complémentaires sur le sujet .....	150
<b>7 Exemples de situations illustrant les propriétés des processus de vote uninominaux</b> .....	155
7.1 Scrutin majoritaire à un tour.....	155
7.2 Scrutin majoritaire à deux tours .....	157
7.3 Vote par éliminations successives .....	161
7.4 Méthode de Bucklin .....	161
7.5 Scrutin de Borda.....	165
7.6 Procédure de Nanson.....	167
7.7 Procédure Minimax.....	171
7.8 Procédure de Copeland .....	175
7.9 Procédure de Kemeny .....	177
7.10 Le vote par approbation.....	179
7.11 Le vote à la moyenne (ou range voting).....	180
7.12 Le vote à la médiane (ou jugement majoritaire) .....	180
7.13 Éléments de la preuve mathématique du théorème d'Arrow .....	182
<b>Remerciements</b> .....	185

## Préface

---

Un « *guide mathématique des modes de scrutin* » ? Voilà qui pourrait surprendre plus d'un citoyen ! Les mathématiques ont souvent une image caricaturale dans la population générale. Nombreux sont ceux qui n'en ont que des souvenirs scolaires, douloureux, faits de calculs dont l'intérêt n'est pas bien clair. On pourrait penser que la seule composante mathématique d'un scrutin consiste à compter les bulletins pour déterminer le candidat qui remporte le suffrage. Et pourtant, la question est beaucoup plus subtile et, surtout, beaucoup plus intéressante. En lisant ce livre, cher lecteur, vous comprendrez qu'il y a beaucoup de sortes de modes de scrutins, que certains sont mauvais, mais qu'aucun n'est meilleur que les autres. On pense spontanément aux élections présidentielles ou législatives. Nous assistons à de grandes manœuvres politiques pendant les campagnes électorales, faites de primaires plus ou moins bien définies, de votes dans les congrès des partis, d'alliances publiques ou secrètes. Par la suite, les élections proprement dites utilisent des procédés auxquels la plupart d'entre nous n'ont jamais réfléchi. En France, l'élection présidentielle est un « *scrutin uninominal majoritaire à deux tours* ». D'autres méthodes pourraient-elles conduire à d'autres résultats ? En

2007, les sondages montraient clairement que la majorité des électeurs aurait préféré François Bayrou à chacun de ses concurrents, et en particulier à Nicolas Sarkozy, qui fut pourtant déclaré vainqueur. Aux États-Unis, lors de l'élection de 2016, Hillary Clinton a récolté 2 014 621 voix de plus de Donald Trump, mais elle a perdu l'élection. Que souhaitons-nous pour nos démocraties ? Hélas, ce livre ne répondra pas à cette question...mais il vous permettra de mieux en comprendre les enjeux. Pythagore affirmait que « *tout est nombre* » mais il ne faudrait pas prendre cette maxime trop au sérieux : les mathématiques peuvent certes améliorer notre compréhension mais il ne faudrait pas limiter la démocratie au calcul. C'est au siècle des Lumières que les « *mathématiques sociales* » ont émergé, en particulier grâce à Jean-Antoine Nicolas de Caritat, marquis de Condorcet. Son *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*, publié en 1784, est une véritable merveille. Le livre que vous avez entre les mains est un lointain descendant de cet essai, enrichi de près de 250 ans d'expériences démocratiques, et d'améliorations des concepts mathématiques. Dans l'introduction, on y retrouve quelques jolies phrases qu'il faudrait peut-être modérer, comme : « *Les vérités des Sciences morales et politiques sont susceptibles de la même certitude que celles qui forment le système des Sciences physiques, et même que les branches de ces Sciences qui, comme l'Astronomie, paraissent approcher de la certitude mathématique* ». Condorcet sait que la lecture de démonstrations mathématiques est souvent indigeste pour les lecteurs non-initiés, et l'essentiel de son essai est accessible à ce qu'on appellerait aujourd'hui le « *grand public* » (sans oublier bien sûr qu'au XVIII<sup>e</sup> siècle, la majorité était illettrée) et qu'on appelait à l'époque « *l'honnête homme* ».

« *Cet Essai ne serait que d'une utilité très limitée s'il ne pouvait servir qu'à des Géomètres, qui d'ailleurs ne trouveraient peut-être dans les méthodes de calcul rien qui pût mériter leur attention. Ainsi j'ai cru devoir y joindre un Discours, où, après avoir exposé les principes fondamentaux du Calcul des probabilités, je me propose de développer les principales*

*questions que j'ai essayé de résoudre et les résultats auxquels le calcul m'a conduit. Les Lecteurs qui ne sont pas Géomètres n'auront besoin, pour juger de l'ouvrage, que d'admettre comme vrai ce qui est donné et prouvé par le calcul ».*

Jean-Baptiste Aubin et Antoine Rolland suivent le conseil de Condorcet. Leur livre ne demande (presqu') aucun bagage mathématique pour comprendre les idées qui y sont exposées. Dans des encadrés plus techniques et dans des annexes, on trouve des compléments pour les lecteurs plus férus de mathématiques. Il ne faudrait pas limiter les scrutins aux élections présidentielles ou parlementaires. Les questions sont nombreuses. Lorsqu'un jury populaire en Cour d'assise vote la culpabilité ou l'innocence d'un accusé, quelle mode de scrutin faut-il préconiser, sachant qu'il est certainement moins grave d'innocenter un coupable que de condamner un innocent? A vrai dire, le sens du mot scrutin utilisé dans ce livre dépasse largement celui qu'on trouve dans le dictionnaire de l'Académie : « *Vote au moyen de bulletins ou de boules que l'on dépose dans une urne, d'où on les tire ensuite pour les compter. On procède à l'élection d'un pape par vote de scrutin* ». Sans nous en rendre compte, nous participons constamment à des scrutins sans bulletins ni boules. Par exemple, lorsque nous écrivons une requête dans un moteur de recherche comme Google, nous recevons en réponse une liste ordonnée de sites. Parmi la multitude de sites qui sont associés à notre requête, quel est celui que Google choisit comme « *le meilleur* »? Il s'agit en fait d'une sorte de scrutin majoritaire dans lequel les électeurs (c'est-à-dire les sites internet) ont droit à plus ou moins de bulletins de vote selon qu'ils sont plus ou moins importants. On n'oserait pas proposer une telle méthode pour une élection présidentielle! Lorsque nous cherchons à acheter un appartement par exemple, les candidats ne manquent pas en général, mais nous devons les classer en fonction d'un grand nombre de critères, comme le prix, la superficie, le quartier, et bien d'autres. Inconsciemment, nous prenons une décision qui essaye de prendre en compte le plus grand nombre possible de ces critères. Souvent, il

nous faut faire des concessions. Comment choisir, individuellement ou collectivement ? Voilà bien le thème de ce livre.

Dans leur Avant-Propos, Jean-Baptiste Aubin et Antoine Rolland se lamentent que « *Les soirs d'élection, les plateaux télévisés sont remplis d'hommes ou de femmes politiques, chacun venant expliquer pourquoi il est le grand vainqueur* » et que les mathématiciens auraient pourtant des choses à dire. « *A défaut d'être invités à la télévision, nous en avons fait un livre* », écrivent-ils. Ils ont bien fait : ce livre résolument élémentaire fera le plus grand bien à la démocratie.

Étienne Ghys

## Avant-propos

---

Les soirs d'élection, les plateaux télévisés sont remplis d'hommes ou de femmes politiques, chacun venant expliquer pourquoi il est le grand vainqueur du scrutin ; remplis également d'analystes politiques décodant la volonté supposée du peuple à travers le nombre de voix recueillies par untel ou unetelle ; remplis enfin d'éditorialistes expliquant pourquoi tout va mal et ne peut aller que mieux – ou l'inverse. Mais de mathématicien ou mathématicienne venant éclairer le processus par lequel une large consultation amène à définir un ou une élu : point. Pourtant ceux-là auraient beaucoup à raconter, dans la mesure où les résultats d'une élection dépendent évidemment des préférences des électeurs à propos des candidats en lice, mais aussi (et surtout ?) du mode de scrutin utilisé. Au delà des convictions politiques de chacun, qui ne sont pas le sujet de cet ouvrage, la manière de rendre compte des préférences collectives des votants est un sujet qui devrait faire l'objet de toutes les attentions dans une démocratie. À défaut d'être invités à la télévision pour en parler, nous en avons fait un livre.

Jean-Baptiste Aubin et Antoine Rolland



# 1

---

## De la démocratie

### 1.1 INTRODUCTION

« *Ce qui est sacré, dans la démocratie, ce sont les valeurs, pas les mécanismes.* » A. Maalouf, *Les identités meurtrières*

#### **Pourquoi un livre sur la démocratie et les modes de scrutin ?**

La démocratie, comme régime politique de gouvernement par le peuple et pour le peuple, est aujourd'hui reconnue dans nos pays comme le régime le plus juste et le plus souhaitable. On s'est battu et l'on continue de se battre en son nom. Elle est belle, notre démocratie, elle est notre trésor, nous nous en revendiquons souvent. Elle est précieuse, mais elle est fragile.

Dans notre monde en perpétuelle évolution, la démocratie n'est pas épargnée par les changements et les attaques. La liste des difficultés, certes d'importances variées, auxquelles les démocraties sont confrontées est longue : remise en cause du principe de représentativité des élus par des mouvements tels les Gilets jaunes en France en 2019, confiance en la tenue d'élections transparentes et loyales si

sévèrement entamée lors de l'élection présidentielle américaine de 2020 qu'elle a fini par aboutir à une sidérante occupation du Capitole coûtant la vie à cinq personnes, échec des scrutins successifs visant à élire un gouvernement stable du pays comme en Belgique en 2010/2011 ou en Israël en 2020/2021, etc.

Synthétiser les avis de millions d'électeurs sur les sujets les plus variés à travers l'élection d'un ou plusieurs représentants est un défi. Ce défi est gigantesque quand on sait l'infinité de nuances que les points de vue existant entre les membres d'une même société peuvent prendre. Ce défi est encore plus grand quand on se rend compte de la nature quelquefois inconciliable de ces différences de points de vue. De plus, la question fondamentale à laquelle on souhaite répondre n'est pas clairement définie et les notions manipulées sont floues : qu'est ce que la « volonté populaire », « l'opinion publique » ? Le but réel d'une élection n'est généralement pas précisé : doit-on trouver une façon de contenter le plus grand nombre ? Doit-on permettre à chaque votant d'avoir une chance de voir son candidat préféré élu ? Doit-on essayer d'assurer à chaque votant que son candidat le moins aimé ne soit pas élu ? Est-ce seulement possible ? Les solutions employées aujourd'hui sont-elles les meilleures ? Selon quels critères ? En existe-t-il une supérieure à toutes les autres ? Des réponses à ces questions dépendent aussi la cohésion et la paix intérieure de nos sociétés.

Des scientifiques analysent depuis plus de deux cents ans les méthodes possibles pour déterminer les préférences d'un groupe à partir de celles de chacun de ses membres. Cette recherche a été prolifique et a mené à la découverte et à l'étude de nombreux modes de scrutin. Elle est appelée « théorie du choix social ». Force est de constater que les dernières avancées fascinantes des spécialistes du domaine sont largement méconnues du grand public. Ce livre a pour objectif de rendre plus concrètes les notions qu'il nous semble indispensable de connaître pour qui vit en démocratie aujourd'hui. Ces

Aucun bagage mathématique n'est requis pour lire ce livre et en comprendre les idées qui y sont exposées. Les passages techniques présentés dans les encadrés peuvent être ignorés si vous le désirez sans que la compréhension du reste n'en soit altérée. Par contre, si vous êtes féru de mathématique, vous y trouverez, ainsi qu'en annexe, toutes les notions scientifiques utiles à la compréhension rigoureusement définies à l'aide des notations mathématiques suivantes :

- $C$  : ensemble des  $n$  candidats  $c_1, \dots, c_n$ . On supposera bien sûr, pour être dans une vraie situation de choix, qu'il y a au moins 2 candidats ( $n \geq 2$ ).
- $c^*$  : candidat vainqueur de l'élection.
- $V$  : ensemble des  $p$  votants  $v_1, \dots, v_p$ . On supposera également qu'il y a au moins trois votants ( $p \geq 3$ ).
- $\sigma$  : classement sur  $C$ , c'est-à-dire une bijection<sup>a</sup> de  $C$  vers  $\{1, 2, \dots, n\}$  telle que  $\sigma(c) > \sigma(c')$  signifie que  $c$  est préféré à  $c'$  ( $\sigma(c) = 1$  pour le candidat le moins aimé et  $\sigma(c) = n$  pour le candidat préféré,  $\sigma$  peut être vu comme un ordre inverse de préférence).
- $\sigma_{v_j}$  : classement correspondant aux préférences du votant  $v_j$ .
- $\sigma_{v_j}^{-1}(k)$  : candidat au rang  $k$  dans les préférences du votant  $v_j$ , et donc  $\sigma_{v_j}^{-1}(n)$  est le candidat préféré du votant  $v_j$ .
- $\Pi$  : mode de scrutin (fonction d'agrégation des préférences des votants).
- $S(C)$  : ensemble de tous les classements possibles sur  $C$ .
- $| \cdot |$  : nombre d'éléments d'un ensemble.
- $A \subset B$  : A est inclus dans B (tout élément de A est aussi dans B).
- $A \cap B$  : intersection de A et B (ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A et B).
- $A \cup B$  : union de A et B (ensemble des éléments qui appartiennent à A, à B ou aux deux).
- $\emptyset$  : ensemble vide (ensemble constitué d'aucun élément).

a. Bijection : application qui établit entre deux ensembles une relation telle que tout élément de l'un soit l'image d'un seul élément de l'autre.

notions touchent à la manière dont pourrait – ou devrait – s’exprimer la démocratie, à l’échelle d’un pays comme d’une organisation plus petite, telle qu’une assemblée, un conseil d’administration, voire un groupe d’amis choisissant leur prochain restaurant !

## 1.2 VIVRE ET CHOISIR ENSEMBLE : UNE BRÈVE HISTOIRE DE LA DÉMOCRATIE

« Pour décider, il faut un nombre impair de personnes, et trois c’est déjà trop. » G. Clemenceau

L’être humain, animal politique, ne se réalise pleinement que par ses relations aux autres. Celles-ci, pour qu’elles soient sereines et constructives, nécessitent des règles. Dans notre société, ces règles se déclinent par exemple avec la politesse, les règles de la bienséance pour le vivre-ensemble, ou encore les règles démocratiques lorsqu’il s’agit de faire des choix qui ont des conséquences sur la société en général. Les premières réflexions connues sur le sujet se firent à la fin du VI<sup>e</sup> siècle avant J.C. lors de l’avènement de la première démocratie à Athènes<sup>1</sup>. Même s’il est probable que ces questions furent traitées plus tôt, c’est à Clithène que l’on devrait des réformes ayant mené à la démocratie athénienne. Il était notamment très attaché au concept d’isonomie (égalité civique). Étymologiquement, démocratie vient de *dêmos* le peuple et *kratein* commander, démocratie signifiant littéralement le pouvoir du peuple.

Un des principaux rôles de la démocratie est de garantir la paix sociale et, pour atteindre ce but, les moyens qu’elle a de s’exprimer doivent être reconnus et acceptés par le plus grand nombre. Si c’est le cas, les personnes choisies (élues, tirées au sort, etc.) ont alors une plus

---

1. Même si André Chéret et Roger Lécureux, dans *Rahan et les hommes-Wampas* épisode paru en 1977, imaginent que le « Fils des âges farouches » a inventé les élections à partir de cailloux de couleurs, nous n’avons pas trace d’élections avant les Grecs anciens.

Si  $a > c$  alors  $A$  est un ensemble décisif pour  $(a, c)$ , et même pour toute paire par le lemme 1  $\Rightarrow K$  n'est pas le plus petit ensemble décisif. Donc  $A$  ou  $B$  est vide, ce qui n'est possible que si l'axiome d'universalité n'est pas vérifié, ou si  $K$  est réduit à un seul élément. Donc  $K$  est un singleton, et par le lemme 2,  $K$  plus petit ensemble décisif est un unique singleton.

## Remerciements

---

Nous souhaitons adresser nos plus sincères remerciements aux éditions EDP Sciences, et à la Société Française de Statistique pour avoir accepté d'héberger ce livre dans la collection *Le monde des données*. Merci en particulier à Jean-Jacques Dreesbeke pour nous avoir conseillé tout au long de l'écriture de cet ouvrage. Merci aussi au pôle de mathématiques de l'INSA Lyon pour son soutien.

Nous souhaitons également remercier nos relecteurs et relectrices pour les commentaires avisés et suggestions bienvenues. Merci donc à Jean-Marie, François, Yves, Muriel, Anton, Nicolas, Anne-Marie, Hélène, Clémence, Lucas, Eliane et Mathias.

Merci enfin à nos familles pour leur patience face à notre lubie du vote mis à toutes les sauces, y compris pour choisir le menu du soir !