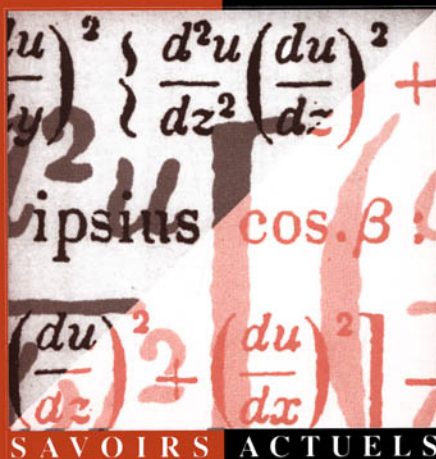


Serge ALINHAC - Patrick GÉRARD

# Opérateurs • pseudo-différentiels • et théorème de Nash-Moser









Serge Alinhac

*Université Paris-Sud, Orsay*

Patrick Gérard

*École Normale Supérieure, Paris*

# Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser

S A V O I R S      A C T U E L S

---

InterEditions/Éditions du CNRS

© 1991, **InterEditions**, 7, rue de l'Estrapade, 75005 Paris.

et

**Editions du CNRS**, 1, place Aristide Briand, 92195 Meudon.

Tous droits réservés. Aucun extrait de ce livre ne peut être reproduit, sous quelque forme ou par quelque procédé que ce soit (machine électronique, mécanique, à photocopier, à enregistrer ou tout autre) sans l'autorisation écrite préalable de InterEditions.

ISBN 2-7296-0364-6

ISBN 2-222-04534-7

# Table des matières

Introduction générale	9
-----------------------	---

## CHAPITRE 0. NOTATIONS ET RAPPELS DE THÉORIE DES DISTRIBUTIONS

1 Espaces de fonctions différentiables et opérateurs différentiels	13
2 Distributions sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$	14
3 Convolution	16
4 Noyaux	18
5 Analyse de Fourier sur $\mathbb{R}^n$	19

## CHAPITRE I. OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS

1 Introduction	23
1.1 L'usage de la transformation de Fourier	23
1.2 Les opérateurs à coefficients variables	25
1.3 Les deux côtés réconciliés	27
2 Symboles	28
2.1 Définition et exemples	28
2.2 Approximation des symboles	30
2.3 Sommes asymptotiques et symboles classiques pseudo-différentiels dans $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$	30
3 Opérateurs pseudo-différentiels dans $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$	33
3.1 Action dans $\mathcal{S}$	33
3.2 Noyaux et adjoints	34
3.2.1 Noyaux	34
3.2.2 Adjoints	35
3.2.3 Adjoint d'un opérateur pseudo-différentiel	36
4 Composition des opérateurs	38
5 Action des opérateurs pseudo-différentiels et espaces de Sobolev	39
5.1 Action sur $L^2$	39
5.2 Action sur les espaces de Sobolev	41
5.3 Inégalité de Gårding (version « faible »)	41
5.4 Inversion des opérateurs elliptiques	42

<b>6 Opérateurs dans un ouvert de <math>\mathbb{R}^n</math></b>	44
6.1 Propriété pseudo-locale	44
6.2 Symboles locaux et opérateurs dans un ouvert	45
6.3 Opérateurs proprement supportés	46
<b>7 Opérateurs sur une variété</b>	47
7.1 Opérateurs pseudo-différentiels et changements de variables	47
7.2 Symbole principal et fibré cotangent	48
7.2.1 <i>Le fibré cotangent <math>T^*M</math> (quelques rappels)</i>	48
7.2.2 <i>Le symbole principal</i>	50
<b>8 Appendice</b>	51
8.1 Intégrales oscillantes	51
8.2 Démonstration des théorèmes de calcul symbolique	54
8.3 Action d'un opérateur pseudo-différentiel sur une fonction oscillante	57
<b>Commentaires sur le chapitre I</b>	61
<b>Exercices sur le chapitre I</b>	61

**CHAPITRE II. ANALYSE NON LINÉAIRE DYADIQUE.  
ANALYSE MICROLOCALE. ESTIMATIONS D'ÉNERGIE**

<b>A. Analyse non linéaire dyadique</b>	91
<b>1 Décomposition de Littlewood-Paley : propriétés générales</b>	91
1.1 La décomposition de Littlewood-Paley	91
1.2 Caractérisation des espaces de Sobolev	94
1.3 Caractérisation des espaces de Hölder	94
1.4 Injections de Sobolev	96
1.5 Inégalités de convexité	96
1.6 Opérateurs de régularisation	97
<b>2 Application à l'étude des produits et de la composition</b>	98
2.1 Estimation d'un produit de deux fonctions	98
2.2 Estimation d'une fonction composée	101
<b>B. Analyse microlocale : front d'onde et opérateurs pseudo-différentiels</b>	104
<b>1 Front d'onde d'une distribution</b>	104
1.1 Définition du front d'onde	104
1.2 Exemples. Cas des distributions de Fourier	106
<b>2 Opérateurs linéaires et front d'onde</b>	107
2.1 Un théorème général	107
2.2 Opérateurs pseudo-différentiels et front d'onde	111
<b>C. Estimations d'énergie</b>	113
<b>1 Opérateurs du premier ordre</b>	113
1.1 L'estimation d'énergie	114



1.2 Existence de solutions	115
1.3 Propagation des singularités	117
<b>2 Opérateurs d'ordre <math>m</math></b>	119
<b>Commentaires sur le chapitre II</b>	122
<b>Exercices sur le chapitre II</b>	123
<b>CHAPITRE III. THÉORÈMES DE FONCTIONS IMPLICITES</b>	
<b><i>A. Théorème des fonctions implicites et problèmes elliptiques</i></b>	139
<b>1 Rappel du théorème dans le cadre des espaces de Banach</b>	139
1.1 Le théorème d'inversion locale	139
1.2 Le théorème des fonctions implicites	141
<b>2 Quelques exemples d'équations différentielles non linéaires</b>	141
2.1 Résolubilité locale d'équations différentielles	141
2.2 Solutions périodiques d'équations non linéaires	142
2.3 Perturbation d'un problème de Dirichlet non linéaire	143
2.4 Résolubilité locale d'équations elliptiques non linéaires	144
<b><i>B. Deux exemples d'utilisation de la méthode du point fixe</i></b>	147
<b>1 Un exemple de la mécanique des fluides</b>	147
1.1 Systèmes hyperboliques symétriques quasi linéaires	147
1.2 Existence locale en temps d'une solution	148
1.3 Contrôle en « grande norme »	150
1.4 Convergence en « petite norme »	151
1.5 Régularité de la solution et conclusion	152
<b>2 Le problème du plongement isométrique</b>	152
2.1 Présentation générale	152
2.2 Réduction à un problème de point fixe	153
<b><i>C. Le théorème de Nash-Moser</i></b>	155
<b>1 Présentation générale</b>	155
<b>2 Deux exemples classiques</b>	157
2.1 Perturbation d'un champ constant sur le tore	157
2.2 L'exemple du plongement isométrique traité par la technique de Nash-Moser	160
<b>3 Estimations douces</b>	160
3.1 Applications douces	160
3.2 Quelques applications douces naturelles	161
3.3 Solutions d'équations différentielles	163
3.3.1 <i>Un calcul explicite</i>	163
3.3.2 <i>Une estimation a priori</i>	163
3.4 Retour sur les exemples classiques	164
3.5 Conclusion	165

<b>4 Le théorème de Nash-Moser</b>	165
4.1 Schéma de résolution	166
4.2 Structure de la récurrence	169
4.3 Preuve de l'hypothèse de récurrence	170
4.4 Régularité additionnelle de la solution construite	173
4.5 Conclusion et remarques	174
<b>Commentaires sur le chapitre III</b>	174
<b>Exercices sur le chapitre III</b>	175
<b>Bibliographie</b>	183
<b>Principales notations introduites</b>	185
<b>Index</b>	187

# Introduction générale

Ce cours est un exposé élémentaire destiné à des étudiants ayant effectué quatre années d'études mathématiques de niveau universitaire. On y suppose connus des éléments d'analyse fonctionnelle, d'analyse de Fourier, de théorie des distributions (en particulier l'analyse de Fourier dans  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$ ). Un rappel des notations, concepts et résultats principaux utilisés dans la suite du cours (avec des références) fait l'objet du chapitre 0. En revanche, aucune connaissance en équations aux dérivées partielles n'est requise, bien que le fait d'avoir été initié au sujet ne puisse pas nuire.

Ce cours a été enseigné (sous le titre « Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser ») à l'Ecole Normale Supérieure à partir d'octobre 1986, dans le cadre du « Magistère de Mathématiques Fondamentales et Appliquées et d'Informatique », à des élèves de deuxième année.

Bien que les thèmes abordés appartiennent plutôt à la littérature de la recherche, nous nous sommes efforcés d'éviter toute discussion savante, tout « clin d'œil », toute allusion sibylline susceptibles d'ouvrir des abîmes sous les pas du lecteur. Dans chaque chapitre, est choisie et développée une certaine présentation du sujet ; le commentaire de fin de chapitre indique les sources, les variantes, certains prolongements actuels, et les connexions entre les thèmes traités.

Enfin, nous avons rassemblé de nombreux exercices, répartis en deux classes. Certains, élémentaires, sont destinés à faciliter et à contrôler l'assimilation du cours. D'autres, plus complexes, et marqués d'une étoile (\*), présentent des développements récents qui ne sont parfois publiés que dans des articles : que leurs auteurs nous pardonnent cette simplification ! Ces exercices, contrairement à ceux de certain(s) traité(s) fameux, peuvent être effectivement résolus par de vrais étudiants, comme l'expérience de l'enseignement à l'ENS l'a montré.

Nous avons souhaité que ce texte puisse être également utilisé par des chercheurs comme une introduction simple et *auto-contenue* à des sujets qui ne leur sont pas familiers.

La double destination de ces notes nous a conduit à leur garder leur brièveté, au prix parfois d'une certaine densité du texte (que nous croyons néanmoins accessible aux étudiants motivés). Nous avons pensé en particulier à de nombreux collègues de « Mathématiques Appliquées » désireux d'utiliser le théorème de Nash-Moser dans leur recherche ou de se mettre au courant de l'analyse microlocale, sans entrer dans les arcanes de la littérature spécialisée : ils pourront lire les chapitres voulus indépendamment les uns des autres.

Le choix du matériel présenté tient aux goûts personnels et aux domaines de recherche des auteurs, qui croient par ailleurs qu'on ne peut espérer résoudre certains problèmes (non linéaires) difficiles en faisant l'économie des opérateurs pseudo-différentiels.

Les auteurs reconnaissent leur dette envers de nombreux mathématiciens (cités dans les commentaires) qui les ont inspirés pour la présentation des sujets abordés, et tout particulièrement envers L. HÖRMANDER, auquel les chapitres I et III.C doivent l'essentiel de leurs contenus mathématiques. La bibliographie présentée en fin d'ouvrage indique les sources utilisées.

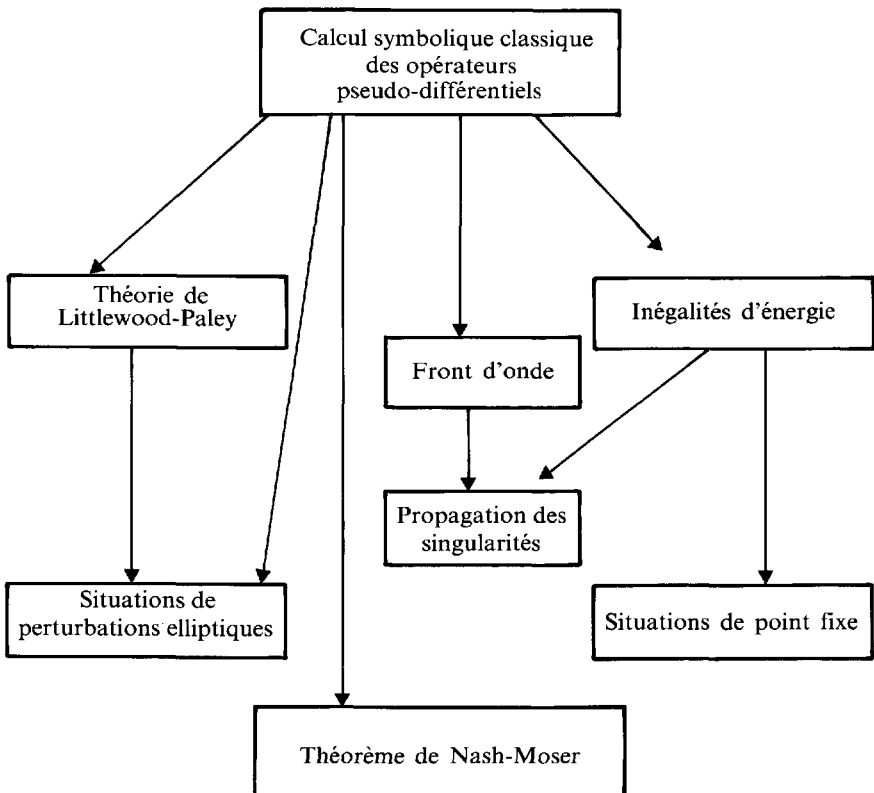
Nous avons cherché, tout en présentant des concepts importants qui sont les points de départ de nombreux développements récents, à aboutir à de vrais théorèmes : régularité elliptique microlocale, propagation des singularités, existence de solutions de systèmes hyperboliques quasi linéaires, existence de plongements isométriques, théorème de Nash-Moser. Le plan de l'ouvrage est le suivant :

— On expose au chapitre I la théorie « minimale » des opérateurs pseudo-différentiels, dans un cadre global (sur  $\mathbb{R}^n$ ) qui se révèle être agréable dans la pratique. Les points principaux en sont le concept de symbole, le calcul symbolique des opérateurs, l'action dans les espaces de Sobolev et l'invariance par changement de coordonnées. Le texte ne présente qu'assez peu d'applications concrètes, et les preuves les plus techniques sont regroupées dans l'appendice, afin de faciliter au lecteur une vue d'ensemble du sujet. Les exercices du chapitre I, particulièrement nombreux, introduisent aux multiples variantes de la théorie proposée, et en présentent quelques applications, notamment à l'analyse sur les variétés compactes.

— Le chapitre II regroupe trois thèmes. Dans la partie A est exposée la théorie de Littlewood-Paley de « décomposition dyadique » des distributions : celle-ci systématise le découpage naturel de l'espace des fréquences  $\xi$  selon leurs tailles  $|\xi|$ , lié au calcul symbolique classique du chapitre I. Cette théorie très simple permet d'obtenir rapidement d'intéressantes propriétés des fonctions composées dans les espaces de Sobolev et de Hölder. La partie B présente le concept de front d'onde et ses liens avec les opérateurs pseudo-différentiels : il s'agit cette fois du découpage conique de l'espace des fréquences  $\xi$  selon leurs directions  $\xi \in S^{n-1}$ , lié

aux homogénéités des symboles classiques. Enfin, la partie C contient un traitement des inégalités d'énergie hyperboliques pour lequel les opérateurs pseudo-différentiels se révèlent être un outil efficace. La fonction du chapitre II est donc de présenter des applications fort utiles de la « théorie sèche » du chapitre I, tout en préparant le matériel et les concepts dont on aura besoin au chapitre III.

— Le dernier chapitre discute certains problèmes de caractère non linéaire apparaissant en géométrie ou en analyse, et qui peuvent se réduire à des problèmes de perturbation. Le plan du chapitre reflète les différentes situations qui se peuvent rencontrer : situations « elliptiques » où le théorème des fonctions implicites banachique usuel suffit ; situations « de point fixe », comme celles qu'on trouve souvent dans les problèmes hyperboliques non linéaires, ou encore dans le problème du plongement isométrique ; situations enfin où la « perte de dérivées » est trop grande, nécessitant l'usage d'une technique de Nash-Moser. Le théorème de Nash-Moser repose entièrement sur l'obtention d'inégalités *a priori* « douces » (que les anglophones nomment « tame ») ; le lecteur, déjà familier avec les



inégalités *a priori* (présentées au chapitre I et au chapitre III.C), saisira le concept d'estimations « douces » par son lien évident avec la théorie de Littlewood-Paley et le calcul paradifférentiel de J.-M. BONY (chapitre II.A).

Ainsi se trouve établie l'unité profonde de ces notes, que l'on peut schématiser ainsi :

Dans cet esprit, nous avons été très heureux de prendre récemment connaissance du travail de L. HÖRMANDER [H9], qui éclaire les liens entre opérateurs pseudo-différentiels et paradifférentiels, méthodes de point fixe et théorème de Nash-Moser.

Finalement, nous tenons à remercier G. BENAROUS et J. B. BOST (Ecole Normale Supérieure, Rue d'Ulm, Paris) pour les précieuses suggestions dont ils ont bien voulu nous faire part.

## CHAPITRE 0

# Notations et rappels de théorie des distributions

Dans ce chapitre, nous introduisons les diverses notations utilisées dans le cours, tout en rappelant quelques éléments de théorie des distributions et d'analyse de Fourier, qui seront d'un usage constant. Nous supposerons donc, dans les chapitres suivants, ces notions familières au lecteur. Néanmoins, un étudiant un peu moins avancé pourra trouver les démonstrations des résultats cités plus bas dans le livre de J. CHAZARAIN et A. PIRIOU [CP] (chapitre I, paragraphes 1, 2 et 4) ou dans celui de W. RUDIN [R]. Au lecteur ignorant tout des distributions, nous conseillons la lecture préalable du cours de L. SCHWARTZ [S], tandis que l'étudiant soucieux de tester ses connaissances dans ce domaine trouvera dans l'ouvrage de C. ZUILY [Z] un grand nombre d'exercices corrigés, accompagnés de rappels de cours.

## 1 ESPACES DE FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES ET OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $k$  est un entier positif ou nul, nous désignerons par  $C^k(\Omega)$  l'espace des fonctions  $k$  fois continûment différentiables sur  $\Omega$ , à valeurs dans  $\mathbb{C}$ . De même,  $C^\infty(\Omega)$  désigne l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur  $\Omega$ . Ces notations s'étendent d'une part au cas où  $\Omega = M$  est une variété différentiable, d'autre part au cas où l'espace d'arrivée n'est plus  $\mathbb{C}$  mais un espace vectoriel topologique  $E$  sur  $\mathbb{R}$  : on notera alors  $C^k(\Omega, E)$ ,  $C^\infty(\Omega, E)$  les espaces correspondants.

Pour  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ,  $C_0^k(\Omega)$  désigne le sous-espace de  $C^k(\Omega)$  dont les éléments sont nuls en dehors d'un compact de  $\Omega$ , tandis que  $C^k(\bar{\Omega})$  est formé des restrictions à  $\Omega$  d'éléments de  $C^k(\mathbb{R}^n)$ .

Pour noter les dérivées partielles d'un élément de  $C^k(\Omega)$ , nous utiliserons les *multi-indices*. Un multi-indice  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  est un

élément de  $\mathbb{N}^n$ , son *module*  $|\alpha|$  est par définition  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ , et on pose  $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$ . Pour  $j \in \{1, \dots, n\}$ , la dérivation  $\frac{\partial}{\partial x_j}$  sera aussi notée  $\partial_{x_j}$  ou  $\partial_j$  lorsqu'aucune confusion n'est à craindre. Pour des raisons liées à la transformation de Fourier (voir paragraphe 5 ci-dessous), il est également utile d'introduire la notation  $D_j = -i \frac{\partial}{\partial x_j}$ . Une dérivation d'ordre plus élevé sera alors notée  $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}$  ou  $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$ . Nous utiliserons aussi cette convention pour désigner les monômes construits sur les composantes d'un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ . Ainsi, si  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ .

Un *opérateur différentiel* sur  $\Omega$  est une combinaison linéaire finie de dérivations d'ordres arbitraires à coefficients dans  $C^\infty(\Omega)$ . Il est dit *d'ordre*  $m$  si les dérivations d'ordre supérieur à  $m$  n'y apparaissent pas. En d'autres termes, un opérateur différentiel d'ordre  $m$  sur  $\Omega$  s'écrira :

$$P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha,$$

où les  $a_\alpha \in C^\infty(\Omega)$  sont les coefficients de  $P$ . Sous cette forme, il est aisé de constater que  $P$  définit une application linéaire de  $C^{k+m}(\Omega)$  dans  $C^k(\Omega)$  pour tout  $k$ . Le *symbole* de  $P$  est la fonction polynomiale en  $\xi$  définie sur  $\Omega \times \mathbb{R}^n$  par

$$p(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha,$$

tandis que son *symbole principal d'ordre*  $m$  (ou *symbole principal* si aucune confusion n'est à craindre) est la fonction homogène en  $\xi$  :

$$p_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x) \xi^\alpha.$$

## 2 DISTRIBUTIONS SUR UN OUVERT DE $\mathbb{R}^n$

a) On appelle *distribution* sur l'ouvert  $\Omega$  toute forme linéaire  $u$  sur  $C_0^\infty(\Omega)$  satisfaisant à la propriété de continuité suivante : pour tout compact  $K$ , il existe un entier  $m$  et une constante  $C$  tels que :

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \quad & \text{nulle en dehors de } K, \\ |\langle u, \varphi \rangle| & \leq C \sup_{x \in K} \sup_{|\alpha| \leq m} |\partial^\alpha \varphi(x)|. \end{aligned}$$

L'espace des distributions sur  $\Omega$  est noté  $\mathcal{D}'(\Omega)$ . Il contient en particulier



l'espace  $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  des fonctions *localement intégrables* sur  $\Omega$ , selon l'identification suivante :

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \forall f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega), \quad \langle f, \varphi \rangle = \int f(x) \varphi(x) dx. \quad (2.1)$$

Un autre exemple de distribution est donné par la *masse de Dirac* en un point. Si  $x_0 \in \Omega$  et  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ , on note  $\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0)$ .

b) Soit  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ . On définit  $\partial_j u \in \mathcal{D}'(\Omega)$  par la formule :

$$\langle \partial_j u, \varphi \rangle = - \langle u, \partial_j \varphi \rangle,$$

qui, compte tenu de l'identification (2.1), prolonge bien aux distributions l'opérateur  $\partial_j$  précédemment défini sur  $C^1(\Omega)$ . De même, si  $a \in C^\infty(\Omega)$ ,  $au \in \mathcal{D}'(\Omega)$  est définie par :

$$\langle au, \varphi \rangle = \langle u, a\varphi \rangle.$$

Ainsi, tout opérateur différentiel  $P = \sum a_\alpha D^\alpha$  se prolonge en une application linéaire de  $\mathcal{D}'(\Omega)$  dans lui-même, par la formule :

$$\langle Pu, \varphi \rangle = \langle u, {}^tP\varphi \rangle,$$

avec  ${}^tP\varphi = \sum (-1)^{|\alpha|} D^\alpha(a_\alpha \varphi)$ .

c) Si  $\Omega'$  est un ouvert contenu dans  $\Omega$ , et si  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ , la *restriction*  $u|_{\Omega'}$  de  $u$  à  $\Omega'$  n'est autre que la restriction de la forme linéaire  $u$  à l'espace  $C_0^\infty(\Omega') \subset C_0^\infty(\Omega)$ . On dira alors que  $u$  est nulle (resp. de classe  $C^k$ ) sur  $\Omega'$  si  $u|_{\Omega'} = 0$  (resp.  $u|_{\Omega'}$  peut être définie par  $f \in C^k(\Omega')$  selon la formule (2.1)). Pour que cette définition soit maniable, il importe que l'on puisse reconstruire  $u$  à partir de ses restrictions sur les ouverts d'un recouvrement de  $\Omega$ . C'est l'objet du lemme suivant.

LEMME DES PARTITIONS DE L'UNITÉ. Soit  $(\Omega_j)$  une famille d'ouverts de  $\Omega$  telle que  $\Omega = \bigcup_j \Omega_j$ . Il existe une famille  $(\varphi_j)$  de fonctions telles que :

- i)  $\forall j, \varphi_j \in C^\infty(\Omega), \text{supp}(\varphi_j) \subset \Omega_j, 0 \leq \varphi_j \leq 1$ .
- ii) Pour tout compact  $K$  de  $\Omega$ ,  $\{j, K \cap \text{supp} \varphi_j \neq \emptyset\}$  est fini.
- iii) Dans  $\Omega$ ,  $\sum_j \varphi_j = 1$ . (Cette somme est bien définie d'après ii.)

Outre les références déjà citées, le lecteur pourra se reporter à l'exercice 6.1 du chapitre I pour une démonstration du lemme ci-dessus (proposée sous l'hypothèse  $\bar{\Omega}_j$  compact dans  $\Omega$  ; le cas général en est une conséquence facile).

A l'aide de ce lemme, on montre par exemple que, si  $\bigcup_j \Omega_j = \Omega$  et si  $u|_{\Omega_j} = 0$  (resp.  $u|_{\Omega_j} \in C^k$ ) pour tout  $j$ , alors  $u = 0$  (resp.  $u \in C^k(\Omega)$ ).

Ceci nous amène aux définitions suivantes : on appelle *support* de  $u$  (resp. *support singulier* de  $u$ ) le complémentaire dans  $\Omega$  des points au voisinage desquels  $u$  est nulle (resp.  $u$  est de classe  $C^\infty$ ). Le support de  $u$  est noté  $\text{supp } u$  ; le support singulier de  $u$  est noté  $\text{supp sing } u$ . Ce sont deux ensembles fermés, vérifiant  $\text{supp sing } u \subset \text{supp } u$ , et le résultat précédent se paraphrase par les équivalences :

$$\begin{aligned} u = 0 &\Leftrightarrow \text{supp } u = \emptyset \\ u \in C^\infty &\Leftrightarrow \text{supp sing } u = \emptyset. \end{aligned}$$

Enfin, remarquons que si  $u \in C^0(\Omega)$ , le support de  $u$  défini ci-dessus coïncide avec l'adhérence de  $\{x \in \Omega, u(x) \neq 0\}$ .

L'espace des distributions à *support compact* dans  $\Omega$  est noté  $\mathcal{E}'(\Omega)$ . Il s'identifie à l'espace des formes linéaires sur  $C^\infty(\Omega)$ , continues pour la topologie définie par les semi-normes

$$\sup_{x \in K} \sup_{|\alpha| \leq m} |\partial^\alpha \varphi(x)|,$$

$K$  parcourant les compacts de  $\Omega$  et  $m$  les entiers.

### 3 CONVOLUTION

a) Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions  $C^\infty$  à supports compacts. On pose :

$$u * v(x) = \int u(y) v(x - y) dy = \int u(x - y) v(y) dy. \quad (3.1)$$

La fonction  $u * v$  ainsi définie est  $C^\infty$  à support compact vérifiant :

$$\text{supp } (u * v) \subset \text{supp } u + \text{supp } v. \quad (3.2)$$

On l'appelle la *convolée* des deux fonctions  $u$  et  $v$ .

On peut bien sûr définir la convolée de fonctions moins régulières. L'extension la plus naturelle concerne les fonctions sommables : si  $u$  et  $v$  appartiennent à  $L^1(\mathbb{R}^n)$ , alors  $u * v$  définie par (3.1) appartient à  $L^1(\mathbb{R}^n)$  et on a :

$$\int |u * v(x)| dx \leq \int |u(x)| dx \cdot \int |v(x)| dx.$$

Néanmoins, ce n'est pas cette extension que nous utiliserons le plus

fréquemment, mais plutôt celle décrite dans les paragraphes *b)* et *d)* ci-dessous, qui concernent les cas où  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ,  $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ , puis où  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ,  $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ .

*b)* Soient  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  et  $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ; la formule

$$u * v(x) = \langle u, v_x \rangle, \quad \text{avec } v_x(y) = v(x - y),$$

définit sur  $\mathbb{R}^n$  une fonction  $u * v$  de classe  $C^\infty$ . Cette fonction vérifie en outre :

$$\partial^\alpha (u * v) = \partial^\alpha u * v = u * \partial^\alpha v \quad (3.3)$$

$$\text{supp}(u * v) \subset \text{supp } u + \text{supp } v. \quad (3.4)$$

*c)* La convolution est à l'origine du très utile procédé de *régularisation*, que nous décrivons maintenant.

Soit  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ , positive ou nulle d'intégrale égale à 1, et soit  $\varepsilon > 0$ ; on pose  $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ . Alors, si  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ , la famille de fonctions  $C^\infty$   $u_\varepsilon = u * \varphi_\varepsilon$  converge vers  $u$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, au sens où :

$$\forall \psi \in C_0^\infty, \quad \int u_\varepsilon(x) \psi(x) dx \rightarrow \langle u, \psi \rangle. \quad (3.5)$$

L'intérêt de ce procédé d'approximation par des fonctions régulières est que le mode de convergence de  $u_\varepsilon$  vers  $u$  est essentiellement décrit par la régularité de  $u$ . Ainsi, si  $u \in C^k(\mathbb{R}^n)$ ,  $u_\varepsilon$  converge vers  $u$  au sens des semi-normes  $\sup_{x \in K} \sup_{|\alpha| \leq k} |\partial^\alpha v(x)|$ , où  $K$  parcourt les compacts de  $\mathbb{R}^n$ ; si

$u \in L^p(\mathbb{R}^n)$  ( $1 \leq p < +\infty$ ), espace des fonctions de puissance  $p$ -ième sommable,  $u_\varepsilon$  tend vers  $u$  dans  $L^p$ .

De plus, la relation (3.4) montre que le support de  $u_\varepsilon$  est arbitrairement proche de celui de  $u$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0. A l'aide d'une « troncature », on étend ainsi le procédé de régularisation aux distributions définies sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ , montrant par exemple que  $C_0^\infty(\Omega)$  est dense dans  $L^p(\Omega)$  si  $p \in a, +\infty[$  et dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$  pour la « topologie faible », i.e. au sens de (3.5).

*d)* Pour définir la convolution de deux distributions, on constate d'abord que, si  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ,  $v, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\int u * v(x) \varphi(x) dx = \langle u, \tilde{v} * \varphi \rangle,$$

où l'on a posé  $\tilde{v}(x) = v(-x)$ .

Après avoir étendu l'opérateur  $v \mapsto \tilde{v}$  aux distributions par :

$$\langle \tilde{v}, \varphi \rangle = \langle v, \tilde{\varphi} \rangle ,$$

on pose, pour  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ,  $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$  et  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\langle u * v, \varphi \rangle = \langle u, \tilde{v} * \varphi \rangle .$$

On définit ainsi une distribution  $u * v$  sur  $\mathbb{R}^n$ , qui vérifie encore (3.3) et (3.4), auxquelles on peut ajouter :

$$\text{supp sing } (u * v) \subset \text{supp sing } u + \text{supp sing } v . \quad (3.6)$$

Par exemple, si  $\delta = \delta_0$  désigne la masse de Dirac à l'origine, on a, pour toute distribution  $u$  sur  $\mathbb{R}^n$ ,  $u * \delta = u$ . La convolution des distributions est fondamentale dans l'étude des opérateurs différentiels à coefficients constants. On en trouvera une illustration dans l'introduction du chapitre I, paragraphe 1.1, où la preuve de la relation (3.6) est également esquissée.

#### 4 NOYAUX

Soient  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  deux ouverts de  $\mathbb{R}^n$ , et soit  $K \in \mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$ . La relation :

$$\langle A_K v, u \rangle = \langle K, u \otimes v \rangle , \quad (4.1)$$

où  $u \in C_0^\infty(\Omega_1)$ ,  $v \in C_0^\infty(\Omega_2)$ ,  $u \otimes v(x_1, x_2) = u(x_1)v(x_2)$ , définit une application linéaire  $A_K: C_0^\infty(\Omega_2) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega_1)$ , continue au sens suivant : pour tout  $u \in C_0^\infty(\Omega_1)$ , pour tout compact  $K$  de  $\Omega_2$ , il existe une constante  $C$  et un entier  $m$  tels que,  $\forall v \in C_0^\infty(\Omega_2)$  supportée dans  $K$ ,

$$|\langle A_K v, u \rangle| \leq C \sup_{x \in K} \sup_{|\alpha| \leq m} |\partial^\alpha v(x)| . \quad (4.2)$$

Lorsque  $K \in L_{\text{loc}}^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$ , la relation (4.1) s'écrit plus familièrement :

$$A_K v(x_1) = \int K(x_1, x_2) v(x_2) dx_2 .$$

De façon générale, la distribution  $K$  est entièrement déterminée par la relation (4.1), et est appelée le *noyau* de l'opérateur  $A_K$ .

Un théorème de L. SCHWARTZ assure que tout opérateur  $A: C_0^\infty(\Omega_2) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega_1)$ , continu au sens de (4.2), admet un noyau. Néanmoins, nous n'utiliserons jamais ce théorème dans la suite, car les opérateurs que nous manipulerons ont des noyaux aisément identifiables.

*Cette page est laissée intentionnellement en blanc.*

