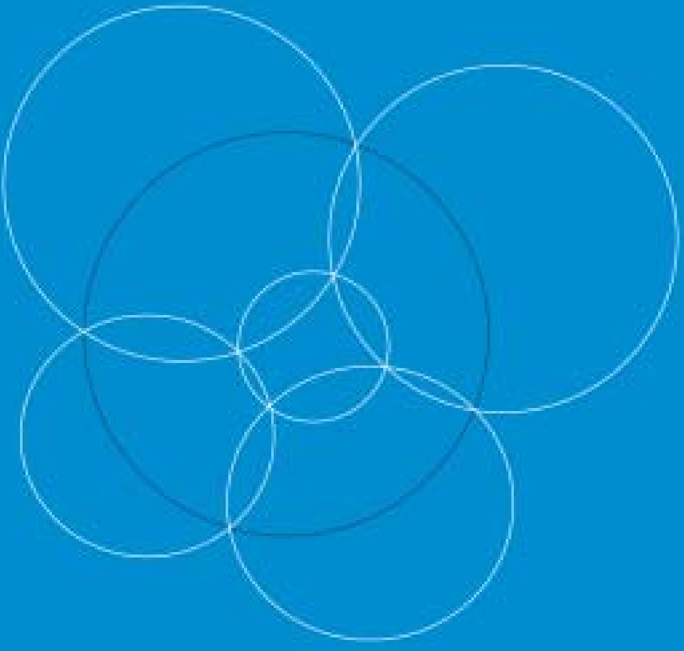
COLLECTION ENSEIGNEMENT SUP ///// Mathématiques

L3M1

Géométrie

Michèle Audin



EDP SCIENCES

GÉOMÉTRIE

Michèle Audin

EDP SCIENCES

17 avenue de Hoggar
Parc d'activités de Courtabœuf, BP 112
91944 Les Ulis Cedex A, France

Michèle Audin
Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur
et CNRS, 7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg cedex, France.
E-mail : Michele.Audin@math.u-strasbg.fr
Url : http://www-irma.u-strasbg.fr/~maudin

ISBN : 2-86883-883-9

TABLE DES MATIÈRES

CECI EST UN LIVRE...

> Je me souviens que j'ai plusieurs fois essayé de me servir d'une règle à calcul, et que plusieurs fois aussi j'ai commencé des manuels de maths modernes en me disant que si j'allais lentement, si je lisais toutes les leçons dans l'ordre en faisant les exercices et tout, il n'y avait aucune raison pour que je cale.
>
> Georges Perec, *in* [**37**].

Une première version de ce livre est parue en 1998. Puis une deuxième, en anglais, en 2003. La présente édition est destinée aux étudiants de licence (L3) et de « master » de mathématiques ainsi qu'à celles et ceux qui préparent le CAPES ou l'agrégation. Elle s'adresse donc à des lecteurs qui ont étudié de la géométrie de façon plus ou moins expérimentale au lycée et de l'algèbre linéaire de façon plus formelle pendant deux années d'université. Elle est issue de l'enseignement que j'ai donné aux étudiants de ces filières et des enseignements que j'en ai moi-même tirés.

Deux idées directrices

La première idée est de fournir un exposé rigoureux, basé sur la définition d'un espace affine *via* l'algèbre linéaire, mais qui n'hésite pas à être terre à terre et élémentaire. C'est pourquoi j'ai souhaité expliquer comment l'algèbre linéaire peut être utilisée en géométrie élémentaire et en même temps montrer de la « vraie » géométrie : des triangles, des sphères, des polyèdres, des angles inscrits, des inversions, des paraboles...

Il est en effet très satisfaisant pour les mathématiciens de définir un espace affine comme un ensemble de points sur lequel opère un espace vectoriel (et c'est ce que je fais ici) mais cette approche formelle, si élégante soit-elle, ne doit pas occulter l'aspect « phénoménologique » de la géométrie élémentaire, son esthétique propre : oui, le théorème de Thalès exprime simplement que les projections sont des applications affines, non, il n'est pas nécessaire d'orienter un plan euclidien pour y définir des angles orientés... tout ça n'empêche ni le cercle d'Euler d'être tangent aux cercles inscrit et exinscrits, ni les droites de Simson d'envelopper une hypocycloïde à trois rebroussements !

Ce parti pris oblige à aborder certains sujets sous des éclairages différents. Par exemple, les inversions planes traitées de façon naïve au chapitre III font des retours plus abstraits dans le chapitre de géométrie projective et dans celui sur les quadriques. De même l'étude des coniques projectives au chapitre VII vient après celle des coniques affines... alors qu'il aurait été plus simple — au moins pour l'auteur ! — de tout déduire du traitement projectif.

La deuxième idée est de produire un texte ouvert : les ouvrages destinés aux étudiants préparant le CAPES sont trop souvent fermés sur le programme de ce concours, ce qui ne donne pas l'impression que les mathématiques soient une science en mouvement (ni en fête, d'ailleurs !). Malgré l'aspect limité du programme traité ici, j'espère intéresser *aussi* des lectrices plus avancées.

Enfin, les mathématiques sont une activité humaine comme les autres et une bonne partie du contenu du livre ressortit à la culture la plus classique puisqu'on y évoque notamment l'arc-en-ciel selon Newton, les sections coniques d'Apollonius, la difficulté à dessiner des cartes de la Terre, la géométrie d'Euclide et le postulat des parallèles, la mesure des latitudes et des longitudes, les problèmes de perspective des peintres de la Renaissance(1), les polyèdres platoniciens. J'ai essayé de le montrer dans la façon de l'écrire(2) et dans la bibliographie.

Quoi de neuf ?

Ce n'est pas juste une nouvelle édition. J'ai corrigé de nombreuses erreurs figurant dans les éditions précédentes (en français et en anglais), inclus quelques

(1) Le traité de géométrie de Dürer [**18**] est destiné aux amateurs d'art, pas aux mathématiciens.
(2) La façon d'écrire les mathématiques fait aussi partie de la culture. Comparer les « onze propriétés de la sphère » de [**27**] et les « quatorze façons de décrire la pluie » de [**19**].

additifs (écrits pour la traduction en anglais) et un bref nouveau chapitre sur les constructions à la règle et au compas (tout au long des exercices, j'ai aussi un peu plus insisté sur les problèmes de construction).

Les prérequis

Il s'agit du programme des deux premières années de la licence, algèbre linéaire et formes quadratiques[(3)], un peu d'algèbre (groupes, sous-groupes, opérations de groupes...)[(4)], la définition d'une application différentiable et un peu de topologie des espaces vectoriels normés (c'est-à-dire de $\mathbf{R}^n$), dans le dernier chapitre, des avatars du théorème des fonctions implicites, pour un ou deux exercices avancés seulement, un peu d'analyse complexe.

Les exercices

Chaque chapitre se termine par des exercices. J'en ai ajouté une bonne cinquantaine pour cette édition. Il faut faire des exercices. Il faut *chercher* les exercices. Un exercice n'est pas quelque chose dont il faut connaître « la » solution pour la réciter à un jury. Aucune notion ne peut être comprise ou assimilée sans un minimum de pratique, de recherche, d'*échecs*. Un exercice sur lequel on n'a pas « séché » est un exercice inutile.

Avec beaucoup de réticences, j'ai quand même ajouté les solutions de nombreux exercices.

Remarque bibliographique

La difficulté que j'avais à conseiller des livres aux étudiants est une des raisons d'être de ce texte : il y a beaucoup de livres de géométrie, mais ceux qui sont bons sont trop difficiles, trop abstraits ou trop volumineux pour ces étudiants (je pense en particulier à [**3, 22, 5**]).

Il n'en reste pas moins qu'il y a quelques bons livres, à tous les niveaux... et que j'espère que celui-ci incitera les lecteurs à aller regarder, par exemple, outre

(3) Il y a quand même un paragraphe de rappels des propriétés des formes quadratiques dans le chapitre sur les coniques.

(4) Les groupes de transformations sont l'essence-même de la géométrie. J'espère que cette idéologie transparaît dans ce texte. Pour ne pas masquer cette essence, j'ai choisi de ne *pas* écrire de paragraphe de sorites généraux sur les opérations de groupe. On consultera par exemple [**39, 4, 24, 5**].

les trois ouvrages déjà cités, [**15, 14, 46, 49**]. J'ai utilisé aussi de beaux livres de terminale (des cinquante dernières années), comme [**16, 30, 34, 47**].

Remerciements

Je remercie d'abord tous ceux et celles, parents, enseignants, amis, collègues et étudiants, qui ont contribué, depuis si longtemps, à me faire aimer les mathématiques présentées dans ce livre.

C'est Daniel Guin qui m'a décidée à l'écrire. Puis, Nicole Bopp a lu avec beaucoup d'attention et critiqué une toute première version des trois premiers chapitres. C'est grâce à eux deux que ce livre existe. Je les en remercie.

Une version préliminaire a été utilisée par les étudiants strasbourgeois pendant l'année universitaire 1997-98. Puis le livre corrigé a été publié, plus ou moins bien, diffusé, plus ou moins bien aussi, mais il a visiblement trouvé un public. Il y a eu ensuite la traduction en anglais et, à chaque étape, de nouvelles suggestions, critiques, remarques, corrections, apportées par les collègues ou les étudiants qui utilisaient telle ou telle version. Et maintenant cette nouvelle édition, fruit de toutes ces contributions. Beaucoup de monde à remercier.

Ici, Pierre Baumann, Laure Blasco, Olivier Debarre, Paul Girault, Gilles Halbout, Vilmos Komornik[(5)], Jean-Yves Merindol. Ailleurs, Ana Cannas da Silva, Michel Coste[(6)], Jérôme Germoni, Daniel Perrin[(7)], Emma Previato, François Rouvière[(8)]. Ici ou là, tous ceux que j'ai oubliés. Plus, encore ici, Vincent Blanlœil, Mihai Damian, Ilia Itenberg et Nathalie Wach pour des exercices supplémentaires. Et encore, tous les étudiants, plus particulièrement Nadine Baldensperger, Régine Barthelmé, Martine Bourst, Sophie Gérardy, Catherine Goetz, Mathieu Hibou, Étienne Mann, Nicolas Meyer, Myriam Oyono-Oyono, Magali Pointeaux, Sandrine Zitt et tous les agrégatifs de ces quelques dernières années, mais enfin, vraiment, tous les étudiants. Enfin Alice Gaertig pour sa détermination à trouver « où était le photographe », Myriam Audin et Juliette Sabbah[(9)] pour leur aide

(5) C'est avec plaisir que j'inclus sa courte et élégante démonstration du théorème d'Erdős–Mordell (exercice III.22).

(6) Autour du théorème de Witt.

(7) Son théorème des six birapports, popularisé par la première édition, a obtenu un succès certain auprès des étudiants — tout en énervant pas mal de mes collègues, vexés, comme j'avoue l'avoir été, de ne pas l'avoir inventé eux-mêmes.

(8) Grâce à qui un parfum de lavande agrémente cette édition.

(9) Qui a même redessiné certaines des figures.

à la rédaction des exercices sur les caustiques. Je les remercie tous et toutes très chaleureusement.

◊

Pour
ce livre,
j'ai utilisé,
comme toujours,
les « paquets » $\LaTeX\, 2_\varepsilon$
de la Société mathématique
de France. Je ne peux me re-
mercier ni pour avoir écrit et tapé ce
texte ni pour avoir résolu la plupart des
quatre cent onze exercices et « dessiné »
les cent quatre vingt-quinze figures
qu'il contient, mais je peux
remercier Claude Sabbah
pour son aide singu-
lière, stylistique,
technique, lo-
gistique,
etc.

◊

I
GÉOMÉTRIE AFFINE

Un espace affine est un ensemble de points, il contient des droites, des plans, et la géométrie affine[1] discute, par exemple, des relations entre ces points et ces droites (points alignés, droites parallèles ou concourantes...). Pour définir ces objets et décrire leurs relations, on peut :

– énoncer une liste d'axiomes, d'incidence principalement, comme « par deux points passe une droite et une seule ». C'est la voie d'Euclide (et plus récemment de Hilbert). Même si la démarche et *a fortiori* les axiomes eux-mêmes n'y sont pas explicités, c'est cette méthode qui est utilisée actuellement dans l'enseignement secondaire français ;

– décider que l'essentiel est que deux points déterminent un *vecteur* et tout définir à l'aide de l'algèbre linéaire, c'est-à-dire par les axiomes définissant les espaces vectoriels.

J'ai choisi de développer ici la *deuxième* méthode, parce qu'elle est plus abstraite et plus nette, bien sûr, mais surtout parce que je crois qu'il est temps, en licence de mathématiques, de montrer aux étudiants que l'algèbre linéaire qu'on leur a enseignée pendant deux ans « sert » à quelque chose !

I.1. Le postulat des parallèles

Mais, pour commencer, je vais rappeler quelques aspects de la *première* méthode. Au commencement, il y a donc les axiomes d'Euclide, qui établissent des relations entre des objets appelés « points » et d'autres appelés « droites ». Par exemple,

[1] Il s'agit ici de géométrie affine « pure » au sens où il n'y a ni distance, ni angle, ni perpendiculaires, ceux-ci appartenant à la géométrie euclidienne, qui fera l'objet des chapitres suivants.

Postulat I.1.1. *Par deux points passe une droite et une seule.*

Les points sont sur les droites, les droites se coupent en des points. Pour ce qui va nous intéresser ici, deux droites qui ne se rencontrent pas (ou sont confondues) sont dites *parallèles* (notation $\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}'$). Et il y a un des axiomes d'Euclide, le célèbre « cinquième postulat », que l'on peut formuler ainsi (ce n'est pas la formulation d'Euclide, mais elle lui est équivalente) :

Postulat I.1.2. *Par un point hors d'une droite, il passe une unique droite parallèle à cette droite.*

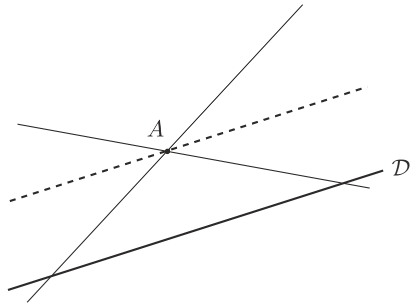


Figure 1. Le postulat des parallèles

Si ce cinquième postulat est célèbre, c'est parce que son indépendance des autres est à la source des géométries non-euclidiennes. Il est intéressant de remarquer que ce cinquième postulat a pour conséquence :

Proposition I.1.3. *La relation « être parallèle à » est une relation d'équivalence entre les droites du plan.*

Démonstration. Par définition, elle est réflexive et symétrique. Montrons qu'elle est transitive. On suppose que trois droites $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$ sont telles que $\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}' \parallel \mathcal{D}''$, on veut montrer que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}''$ sont parallèles. Supposons donc que $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}''$ ne soit pas vide, soit $A \in \mathcal{D} \cap \mathcal{D}''$. La droite $\mathcal{D}'$ passe par A, elle est parallèle à $\mathcal{D}$ et à $\mathcal{D}''$, donc on a $\mathcal{D} = \mathcal{D}''$, grâce à l'unicité dans le cinquième postulat. $\square$

I.2. Espaces affines

Je m'arrêterai là pour le moment. Passons maintenant à l'algèbre linéaire. Voici la définition d'un espace affine.

Définition I.2.1. Un ensemble $\mathcal{E}$ est muni d'une structure d'*espace affine* par la donnée d'un espace vectoriel[2] E et d'une application Θ qui associe un vecteur de E à tout couple de points de $\mathcal{E}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}\times\mathcal{E} & \longrightarrow & E \\ (A,B) & \longmapsto & \overrightarrow{AB} \end{array}$$

telle que

– pour tout point A de $\mathcal{E}$, l'application partielle $\Theta_A : B \mapsto \overrightarrow{AB}$ soit une bijection de $\mathcal{E}$ sur E,

– pour tous points A, B et C de $\mathcal{E}$, on ait $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ (relation de Chasles).

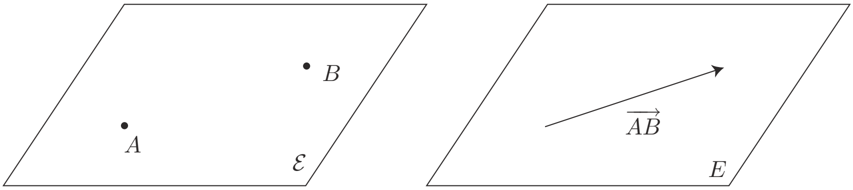


FIGURE 2

L'espace vectoriel E est la *direction* de $\mathcal{E}$, les éléments de $\mathcal{E}$ sont appelés *points*, on appelle *dimension* de $\mathcal{E}$ la dimension de l'espace vectoriel E qui le dirige.

Exemples I.2.2

(1) Avec cette définition, l'ensemble vide est un espace affine (dirigé par n'importe quel espace vectoriel) dont il est sage de convenir qu'il n'a pas de dimension.

(2) Tout espace vectoriel a une structure naturelle[3] d'espace affine : l'application $\Theta : E \times E \to E$ est simplement celle qui, au couple (u, v), associe le vecteur $v - u$.

(3) Si $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ sont deux espaces affines dirigés respectivement par E_1 et E_2, le produit cartésien $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$ est un espace affine dirigé par $E_1 \times E_2$: l'application

$$\Theta : (\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2) \times (\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2) \to E_1 \times E_2$$

[2] C'est un espace vectoriel sur un corps $\mathbf{K}$ de caractéristique 0 que je ne précise pas pour ne pas alourdir les définitions. Les lectrices peuvent imaginer que ce corps est $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

[3] Elle est *naturelle* parce qu'elle est définie par la seule structure d'espace vectoriel (sans autre choix). Il serait plus exact, mais moins naturel (!) de dire qu'elle est « canonique ».

est celle qui, au couple $((A_1, A_2), (B_1, B_2))$, associe le couple de vecteurs $(\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_2B_2})$.

Propriétés

La relation de Chasles donne directement $\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AA}$ donc $\overrightarrow{AA} = 0$ puis $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = 0$ donc $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

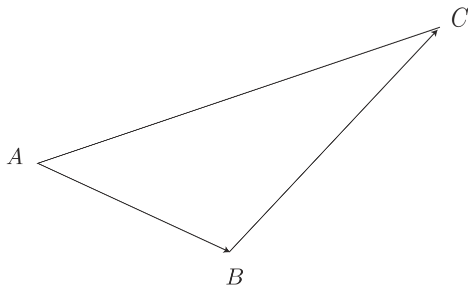


Figure 3. Relation de Chasles

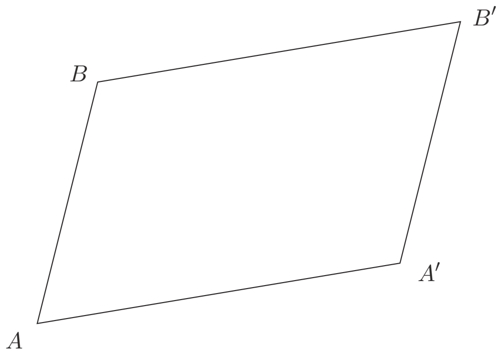


Figure 4. Règle du parallélogramme

Règle du parallélogramme

Elle dit que les deux égalités $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ sont équivalentes. Elle se démontre en appliquant la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'B},$$

ce qui s'écrit aussi

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{BB'}.$$

Quand l'une des deux égalités est vérifiée, on dit que $AA'B'B$ est un *parallélogramme*.

Remarque I.2.3. Si A est un point de l'espace affine $\mathcal{E}$ et si u est un vecteur de l'espace vectoriel E qui le dirige, l'unique point B de $\mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{AB} = u$ est parfois noté

$$B = A + u.$$

Cette notation est cohérente puisqu'on a

$$(A + u) + v = A + (u + v)$$

P