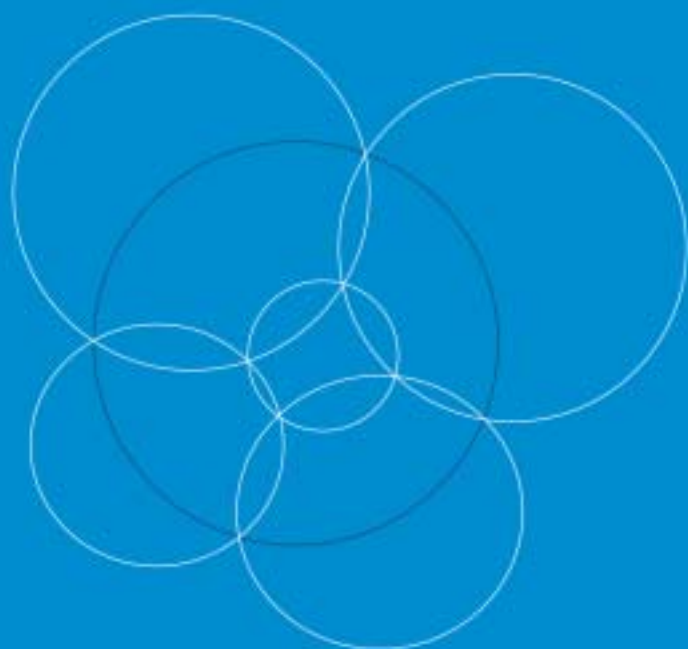


COLLECTION ENSEIGNEMENT SUP // // // Mathématiques

L3M1

Géométrie

Michèle Audin



GÉOMÉTRIE

Michèle Audin



17 avenue de Hoggar
Parc d'activités de Courtabœuf, BP 112
91944 Les Ulis Cedex A, France

Michèle Audin

Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur
et CNRS, 7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg cedex, France.

E-mail : Michele.Audin@math.u-strasbg.fr

Url : <http://www-irma.u-strasbg.fr/~maudin>

ISBN : 2-86883-883-9

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés, réservés pour tous pays. La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (alinéa 1er de l'article 40). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du code pénal.

© 2006, EDP Sciences

TABLE DES MATIÈRES

Ceci est un livre.....	1
I. Géométrie affine.....	7
I.1. Le postulat des parallèles.....	7
I.2. Espaces affines.....	8
I.3. Applications affines.....	16
I.4. Trois théorèmes de géométrie plane.....	26
I.5. Appendice : rappels succincts sur les barycentres.....	29
I.6. Appendice : notion de convexité.....	31
I.7. Appendice : coordonnées cartésiennes.....	33
Exercices et problèmes.....	35
II. Géométrie euclidienne, généralités.....	51
II.1. Espaces euclidiens.....	51
II.2. Structure des isométries.....	55
II.3. Groupe orthogonal.....	60
Exercices et problèmes.....	67
III. Géométrie euclidienne plane.....	73
III.1. Angles.....	73
III.2. Isométries et déplacements du plan.....	85
III.3. Similitudes planes.....	89
III.4. Inversions et faisceaux de cercles.....	94
Exercices et problèmes.....	110
IV. Constructions à la règle et au compas.....	127
IV.1. La règle du jeu.....	128
IV.2. Les nombres constructibles.....	130
IV.3. Applications à des problèmes de construction.....	133
IV.4. La question des polygones réguliers.....	134
IV.5. Remarques supplémentaires.....	138
Exercices et problèmes.....	138

V. Géométrie euclidienne dans l'espace	143
V.1. Isométries et déplacements de l'espace.....	143
V.2. Produit vectoriel, calculs d'aires.....	147
V.3. Sphères, triangles sphériques.....	151
V.4. Polyèdres, formule d'Euler.....	153
V.5. Polyèdres réguliers.....	156
Exercices et problèmes.....	161
VI. Géométrie projective	177
VI.1. Espaces projectifs.....	177
VI.2. Sous-espaces projectifs.....	179
VI.3. Liaison affine/projectif.....	181
VI.4. Dualité projective.....	187
VI.5. Homographies.....	190
VI.6. Birapport.....	196
VI.7. Droite projective complexe, groupe circulaire.....	200
Exercices et problèmes.....	206
VII. Coniques et quadriques	221
VII.1. Quadriques et coniques affines, généralités.....	221
VII.2. Classification et propriétés des coniques affines.....	228
VII.3. Quadriques et coniques projectives.....	239
VII.4. Birapport sur une conique et théorème de Pascal.....	247
VII.5. Quadriques affines et géométrie projective.....	250
VII.6. Cercles, inversions, faisceaux de cercles.....	259
VII.7. Rappels sur les formes quadratiques.....	265
Exercices et problèmes.....	276
VIII. Courbes, enveloppes et développées	291
VIII.1. Enveloppe d'une famille de droites dans le plan.....	293
VIII.2. Courbure d'une courbe plane.....	299
VIII.3. Développées.....	301
VIII.4. Appendice : rappels sur les courbes paramétrées.....	302
Exercices et problèmes.....	305
IX. Surfaces dans l'espace	315
IX.1. Exemples de surfaces dans l'espace.....	315
IX.2. Géométrie différentielle des surfaces de l'espace.....	318
IX.3. Propriétés métriques des surfaces.....	331
IX.4. Appendice : quelques formules.....	341
Exercices et problèmes.....	343

Indications pour les exercices	349
Chapitre I.....	349
Chapitre II.....	355
Chapitre III.....	359
Chapitre IV.....	371
Chapitre V.....	371
Chapitre VI.....	381
Chapitre VII.....	387
Chapitre VIII.....	396
Chapitre IX.....	400
Bibliographie	407
Index	411

CECI EST UN LIVRE...

Je me souviens que j'ai plusieurs fois essayé de me servir d'une règle à calcul, et que plusieurs fois aussi j'ai commencé des manuels de maths modernes en me disant que si j'allais lentement, si je lisais toutes les leçons dans l'ordre en faisant les exercices et tout, il n'y avait aucune raison pour que je cale.

Georges Perec, *in* [37].

Une première version de ce livre est parue en 1998. Puis une deuxième, en anglais, en 2003. La présente édition est destinée aux étudiants de licence (L3) et de « master » de mathématiques ainsi qu'à celles et ceux qui préparent le CAPES ou l'agrégation. Elle s'adresse donc à des lecteurs qui ont étudié de la géométrie de façon plus ou moins expérimentale au lycée et de l'algèbre linéaire de façon plus formelle pendant deux années d'université. Elle est issue de l'enseignement que j'ai donné aux étudiants de ces filières et des enseignements que j'en ai moi-même tirés.

Deux idées directrices

La première idée est de fournir un exposé rigoureux, basé sur la définition d'un espace affine *via* l'algèbre linéaire, mais qui n'hésite pas à être terre à terre et élémentaire. C'est pourquoi j'ai souhaité expliquer comment l'algèbre linéaire peut

être utilisée en géométrie élémentaire et en même temps montrer de la « vraie » géométrie : des triangles, des sphères, des polyèdres, des angles inscrits, des inversions, des paraboles...

Il est en effet très satisfaisant pour les mathématiciens de définir un espace affine comme un ensemble de points sur lequel opère un espace vectoriel (et c'est ce que je fais ici) mais cette approche formelle, si élégante soit-elle, ne doit pas occulter l'aspect « phénoménologique » de la géométrie élémentaire, son esthétique propre : oui, le théorème de Thalès exprime simplement que les projections sont des applications affines, non, il n'est pas nécessaire d'orienter un plan euclidien pour y définir des angles orientés... tout ça n'empêche ni le cercle d'Euler d'être tangent aux cercles inscrit et exinscrits, ni les droites de Simson d'envelopper une hypocycloïde à trois rebroussements !

Ce parti pris oblige à aborder certains sujets sous des éclairages différents. Par exemple, les inversions planes traitées de façon naïve au chapitre III font des retours plus abstraits dans le chapitre de géométrie projective et dans celui sur les quadriques. De même l'étude des coniques projectives au chapitre VII vient après celle des coniques affines... alors qu'il aurait été plus simple — au moins pour l'auteur ! — de tout déduire du traitement projectif.

La deuxième idée est de produire un texte ouvert : les ouvrages destinés aux étudiants préparant le CAPES sont trop souvent fermés sur le programme de ce concours, ce qui ne donne pas l'impression que les mathématiques soient une science en mouvement (ni en fête, d'ailleurs !). Malgré l'aspect limité du programme traité ici, j'espère intéresser *aussi* des lectrices plus avancées.

Enfin, les mathématiques sont une activité humaine comme les autres et une bonne partie du contenu du livre ressortit à la culture la plus classique puisqu'on y évoque notamment l'arc-en-ciel selon Newton, les sections coniques d'Apollonius, la difficulté à dessiner des cartes de la Terre, la géométrie d'Euclide et le postulat des parallèles, la mesure des latitudes et des longitudes, les problèmes de perspective des peintres de la Renaissance⁽¹⁾, les polyèdres platoniciens. J'ai essayé de le montrer dans la façon de l'écrire⁽²⁾ et dans la bibliographie.

Quoi de neuf ?

Ce n'est pas juste une nouvelle édition. J'ai corrigé de nombreuses erreurs figurant dans les éditions précédentes (en français et en anglais), inclus quelques

⁽¹⁾Le traité de géométrie de Dürer [18] est destiné aux amateurs d'art, pas aux mathématiciens.

⁽²⁾La façon d'écrire les mathématiques fait aussi partie de la culture. Comparer les « onze propriétés de la sphère » de [27] et les « quatorze façons de décrire la pluie » de [19].

additifs (écrits pour la traduction en anglais) et un bref nouveau chapitre sur les constructions à la règle et au compas (tout au long des exercices, j'ai aussi un peu plus insisté sur les problèmes de construction).

Les prérequis

Il s'agit du programme des deux premières années de la licence, algèbre linéaire et formes quadratiques⁽³⁾, un peu d'algèbre (groupes, sous-groupes, opérations de groupes...)⁽⁴⁾, la définition d'une application différentiable et un peu de topologie des espaces vectoriels normés (c'est-à-dire de \mathbf{R}^n), dans le dernier chapitre, des avatars du théorème des fonctions implicites, pour un ou deux exercices avancés seulement, un peu d'analyse complexe.

Les exercices

Chaque chapitre se termine par des exercices. J'en ai ajouté une bonne cinquantaine pour cette édition. Il faut faire des exercices. Il faut *chercher* les exercices. Un exercice n'est pas quelque chose dont il faut connaître « la » solution pour la réciter à un jury. Aucune notion ne peut être comprise ou assimilée sans un minimum de pratique, de recherche, d'*échecs*. Un exercice sur lequel on n'a pas « séché » est un exercice inutile.

Avec beaucoup de réticences, j'ai quand même ajouté les solutions de nombreux exercices.

Remarque bibliographique

La difficulté que j'avais à conseiller des livres aux étudiants est une des raisons d'être de ce texte : il y a beaucoup de livres de géométrie, mais ceux qui sont bons sont trop difficiles, trop abstraits ou trop volumineux pour ces étudiants (je pense en particulier à [3, 22, 5]).

Il n'en reste pas moins qu'il y a quelques bons livres, à tous les niveaux... et que j'espère que celui-ci incitera les lecteurs à aller regarder, par exemple, outre

⁽³⁾Il y a quand même un paragraphe de rappels des propriétés des formes quadratiques dans le chapitre sur les coniques.

⁽⁴⁾Les groupes de transformations sont l'essence-même de la géométrie. J'espère que cette idéologie transparait dans ce texte. Pour ne pas masquer cette essence, j'ai choisi de ne *pas* écrire de paragraphe de sorites généraux sur les opérations de groupe. On consultera par exemple [39, 4, 24, 5].

les trois ouvrages déjà cités, [15, 14, 46, 49]. J'ai utilisé aussi de beaux livres de terminale (des cinquante dernières années), comme [16, 30, 34, 47].

Remerciements

Je remercie d'abord tous ceux et celles, parents, enseignants, amis, collègues et étudiants, qui ont contribué, depuis si longtemps, à me faire aimer les mathématiques présentées dans ce livre.

C'est Daniel Guin qui m'a décidée à l'écrire. Puis, Nicole Bopp a lu avec beaucoup d'attention et critiqué une toute première version des trois premiers chapitres. C'est grâce à eux deux que ce livre existe. Je les en remercie.

Une version préliminaire a été utilisée par les étudiants strasbourgeois pendant l'année universitaire 1997-98. Puis le livre corrigé a été publié, plus ou moins bien, diffusé, plus ou moins bien aussi, mais il a visiblement trouvé un public. Il y a eu ensuite la traduction en anglais et, à chaque étape, de nouvelles suggestions, critiques, remarques, corrections, apportées par les collègues ou les étudiants qui utilisaient telle ou telle version. Et maintenant cette nouvelle édition, fruit de toutes ces contributions. Beaucoup de monde à remercier.

Ici, Pierre Baumann, Laure Blasco, Olivier Debarre, Paul Girault, Gilles Halbout, Vilmos Komornik⁽⁵⁾, Jean-Yves Merindol. Ailleurs, Ana Cannas da Silva, Michel Coste⁽⁶⁾, Jérôme Germoni, Daniel Perrin⁽⁷⁾, Emma Previato, François Rouvière⁽⁸⁾. Ici ou là, tous ceux que j'ai oubliés. Plus, encore ici, Vincent Blanlœil, Mihai Damian, Ilia Itenberg et Nathalie Wach pour des exercices supplémentaires. Et encore, tous les étudiants, plus particulièrement Nadine Baldensperger, Régine Barthelmé, Martine Bournst, Sophie Gérardy, Catherine Goetz, Mathieu Hibou, Étienne Mann, Nicolas Meyer, Myriam Oyono-Oyono, Magali Pointeaux, Sandrine Zitt et tous les agrégatifs de ces quelques dernières années, mais enfin, vraiment, tous les étudiants. Enfin Alice Gaertig pour sa détermination à trouver « où était le photographe », Myriam Audin et Juliette Sabbah⁽⁹⁾ pour leur aide

⁽⁵⁾C'est avec plaisir que j'inclus sa courte et élégante démonstration du théorème d'Erdős–Mordell (exercice III.22).

⁽⁶⁾Autour du théorème de Witt.

⁽⁷⁾Son théorème des six birapports, popularisé par la première édition, a obtenu un succès certain auprès des étudiants — tout en énervant pas mal de mes collègues, vexés, comme j'avoue l'avoir été, de ne pas l'avoir inventé eux-mêmes.

⁽⁸⁾Grâce à qui un parfum de lavande agrémenté cette édition.

⁽⁹⁾Qui a même redessiné certaines des figures.

à la rédaction des exercices sur les caustiques. Je les remercie tous et toutes très chaleureusement.

◇
Pour
ce livre,
j'ai utilisé,
comme toujours,
les « paquets » $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$
de la Société mathématique
de France. Je ne peux me re-
mercier ni pour avoir écrit et tapé ce
texte ni pour avoir résolu la plupart des
quatre cent onze exercices et « dessiné »
les cent quatre vingt-quinze figures
qu'il contient, mais je peux
remercier Claude Sabbah
pour son aide singu-
lière, stylistique,
technique, lo-
gistique,
etc.
◇

I

GÉOMÉTRIE AFFINE

Un espace affine est un ensemble de points, il contient des droites, des plans, et la géométrie affine⁽¹⁾ discute, par exemple, des relations entre ces points et ces droites (points alignés, droites parallèles ou concourantes...). Pour définir ces objets et décrire leurs relations, on peut :

– énoncer une liste d’axiomes, d’incidence principalement, comme « par deux points passe une droite et une seule ». C’est la voie d’Euclide (et plus récemment de Hilbert). Même si la démarche et *a fortiori* les axiomes eux-mêmes n’y sont pas explicités, c’est cette méthode qui est utilisée actuellement dans l’enseignement secondaire français ;

– décider que l’essentiel est que deux points déterminent un *vecteur* et tout définir à l’aide de l’algèbre linéaire, c’est-à-dire par les axiomes définissant les espaces vectoriels.

J’ai choisi de développer ici la *deuxième* méthode, parce qu’elle est plus abstraite et plus nette, bien sûr, mais surtout parce que je crois qu’il est temps, en licence de mathématiques, de montrer aux étudiants que l’algèbre linéaire qu’on leur a enseignée pendant deux ans « sert » à quelque chose !

I.1. Le postulat des parallèles

Mais, pour commencer, je vais rappeler quelques aspects de la *première* méthode. Au commencement, il y a donc les axiomes d’Euclide, qui établissent des relations entre des objets appelés « points » et d’autres appelés « droites ». Par exemple,

⁽¹⁾Il s’agit ici de géométrie affine « pure » au sens où il n’y a ni distance, ni angle, ni perpendiculaires, ceux-ci appartenant à la géométrie euclidienne, qui fera l’objet des chapitres suivants.

Postulat I.1.1. *Par deux points passe une droite et une seule.*

Les points sont sur les droites, les droites se coupent en des points. Pour ce qui va nous intéresser ici, deux droites qui ne se rencontrent pas (ou sont confondues) sont dites *parallèles* (notation $\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}'$). Et il y a un des axiomes d'Euclide, le célèbre « cinquième postulat », que l'on peut formuler ainsi (ce n'est pas la formulation d'Euclide, mais elle lui est équivalente) :

Postulat I.1.2. *Par un point hors d'une droite, il passe une unique droite parallèle à cette droite.*

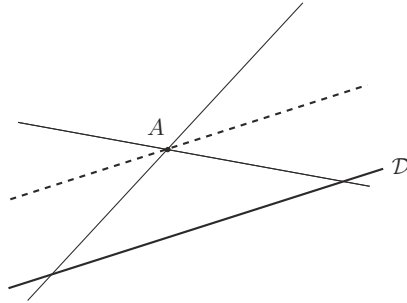


FIGURE 1. Le postulat des parallèles

Si ce cinquième postulat est célèbre, c'est parce que son indépendance des autres est à la source des géométries non-euclidiennes. Il est intéressant de remarquer que ce cinquième postulat a pour conséquence :

Proposition I.1.3. *La relation « être parallèle à » est une relation d'équivalence entre les droites du plan.*

Démonstration. Par définition, elle est réflexive et symétrique. Montrons qu'elle est transitive. On suppose que trois droites \mathcal{D} , \mathcal{D}' et \mathcal{D}'' sont telles que $\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}' \parallel \mathcal{D}''$, on veut montrer que \mathcal{D} et \mathcal{D}'' sont parallèles. Supposons donc que $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}''$ ne soit pas vide, soit $A \in \mathcal{D} \cap \mathcal{D}''$. La droite \mathcal{D}' passe par A , elle est parallèle à \mathcal{D} et à \mathcal{D}'' , donc on a $\mathcal{D} = \mathcal{D}''$, grâce à l'unicité dans le cinquième postulat. \square

I.2. Espaces affines

Je m'arrêterai là pour le moment. Passons maintenant à l'algèbre linéaire. Voici la définition d'un espace affine.

Définition I.2.1. Un ensemble \mathcal{E} est muni d'une structure d'espace affine par la donnée d'un espace vectoriel⁽²⁾ E et d'une application Θ qui associe un vecteur de E à tout couple de points de \mathcal{E} :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \times \mathcal{E} &\longrightarrow E \\ (A, B) &\longmapsto \overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

telle que

- pour tout point A de \mathcal{E} , l'application partielle $\Theta_A : B \mapsto \overrightarrow{AB}$ soit une bijection de \mathcal{E} sur E ,
- pour tous points A, B et C de \mathcal{E} , on ait $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ (relation de Chasles).



FIGURE 2

L'espace vectoriel E est la *direction* de \mathcal{E} , les éléments de \mathcal{E} sont appelés *points*, on appelle *dimension* de \mathcal{E} la dimension de l'espace vectoriel E qui le dirige.

Exemples I.2.2

(1) Avec cette définition, l'ensemble vide est un espace affine (dirigé par n'importe quel espace vectoriel) dont il est sage de convenir qu'il n'a pas de dimension.

(2) Tout espace vectoriel a une structure naturelle⁽³⁾ d'espace affine : l'application $\Theta : E \times E \rightarrow E$ est simplement celle qui, au couple (u, v) , associe le vecteur $v - u$.

(3) Si \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 sont deux espaces affines dirigés respectivement par E_1 et E_2 , le produit cartésien $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$ est un espace affine dirigé par $E_1 \times E_2$: l'application

$$\Theta : (\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2) \times (\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2) \rightarrow E_1 \times E_2$$

⁽²⁾C'est un espace vectoriel sur un corps \mathbf{K} de caractéristique 0 que je ne précise pas pour ne pas alourdir les définitions. Les lectrices peuvent imaginer que ce corps est \mathbf{R} ou \mathbf{C} .

⁽³⁾Elle est *naturelle* parce qu'elle est définie par la seule structure d'espace vectoriel (sans autre choix). Il serait plus exact, mais moins naturel (!) de dire qu'elle est « canonique ».

est celle qui, au couple $((A_1, A_2), (B_1, B_2))$, associe le couple de vecteurs $(\overrightarrow{A_1 B_1}, \overrightarrow{A_2 B_2})$.

Propriétés

La relation de Chasles donne directement $\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AA}$ donc $\overrightarrow{AA} = 0$ puis $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = 0$ donc $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

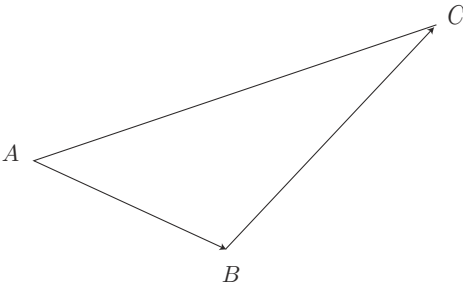


FIGURE 3. Relation de Chasles

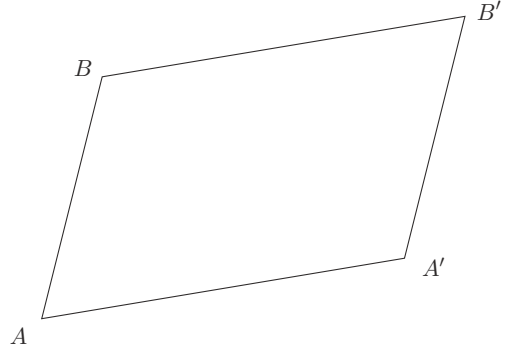


FIGURE 4. Règle du parallélogramme

Règle du parallélogramme

Elle dit que les deux égalités $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ sont équivalentes. Elle se démontre en appliquant la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'B},$$

ce qui s'écrit aussi

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{BB'}.$$

Quand l'une des deux égalités est vérifiée, on dit que $AA'B'B$ est un *parallélogramme*.

Remarque I.2.3. Si A est un point de l'espace affine \mathcal{E} et si u est un vecteur de l'espace vectoriel E qui le dirige, l'unique point B de \mathcal{E} tel que $\overrightarrow{AB} = u$ est parfois noté

$$B = A + u.$$

Cette notation est cohérente puisqu'on a

$$(A + u) + v = A + (u + v)$$

P

- Pappus, 28, 47, 185, 213
 parabole, 231, 251, 294, 312
 parabolique
 antenne, 307
 point, 331, 345
 paraboloïde, 315
 elliptique, 255
 hyperbolique, 255, 277, 317
 parallèle, 14, 151, 169, 179, 316
 parallèles
 absence de, 153, 179
 courbes, 302
 postulat des, 2, 15, 153, 219
 sous-espaces, 14
 parallélogramme, 10, 35
 règle du, 10
 paramétrage
 cartésien, 320
 d'un cercle, 306
 d'une conique, 247, 306
 d'une courbe, 291
 d'une courbe algébrique, 292
 d'une cubique à point double, 306
 d'une cubique cuspidale, 306
 d'une ellipse, 230
 d'une hyperbole, 279
 par la longueur d'arc, 305
 paramètre, 231
 paramétrée
 courbe, 291
 nappe, 318
 parapluie de Whitney, 345
 Pascal, 116, 121, 249, 284
 pentagone, 159, 171, 172
 Péc, 1
 perpendiculaire commune, 161
 Perrin, 215
 perspective, 2, 177, 208, 211, 213, 290
 petit
 axe, 231
 cercle, 151
 photographie, 211, 213, 290
 pinceau, 104
 pivot, 119, 215
 plan
 affine, 12
 hyperbolique, 220
 projectif, 178, 182
 projectif réel, 217
 tangent, 324
 tangent à une surface de révolution, 344
 tangent à une surface réglée, 344
 planaire
 point, 331, 345
 planète, 282
 Plücker, 215, 255, 344
 pluie, 2, 308
 Poincaré, 219, 341
 point
 à l'infini, 102, 182, 201, 203, 225, 261
 base, 105, 246
 cyclique, 256
 d'inflexion, 304
 de Fermat, 120
 de Gergonne, 113
 de rebroussement, 303
 elliptique, 330, 337
 hyperbolique, 330, 337
 limite, 106
 parabolique, 331, 345
 planaire, 331, 345
 régulier, 303, 319
 singulier, 303, 320, 324, 345
 polaire
 d'un point par rapport à une conique, 242
 décomposition, 286
 forme, 265
 hyperplan, 242
 océan, 169
 polarité par rapport à une quadrique, 242
 pôle
 d'un hyperplan par rapport à une quadrique, 242
 d'une droite par rapport à une conique, 242
 d'une inversion, 94
 nord, 168
 polyèdre, 153
 dual, 156
 platonicien, 2
 régulier, 157
 polygone régulier, 127, 134, 137, 156
 position
 d'une courbe par rapport à sa tangente, 303
 d'une ellipse par rapport à sa tangente, 230
 d'une parabole par rapport à sa tangente, 280
 d'une surface par rapport à son plan tangent, 329, 337
 générale, 327
 postulat des parallèles, 2, 15, 153, 219
 premier
 cas d'égalité, 116
 cas de similitude, 120
 théorème d'Apollonius, 279
 principale
 courbure, 337
 principe
 de conjugaison, 23
 de Huygens, 302, 320
 problème de Fagnano, 114
 produit
 scalaire, 51, 255, 265
 vectoriel, 147
 projectif
 espace, 177
 groupe, 191, 201, 244
 hyperplan, 180

- lecteur, 223
- plan, 178, 182
- repère, 192, 216
- sous-espace, 179
- projection
 - affine, 38
 - stéréographique, 168, 173, 200
- projective
 - complétion, 183, 195, 200, 240, 250
 - conique, 239
 - droite, 178, 181, 200
 - dualité, 187, 208, 287
 - lectrice, 304
 - quadrique, 239
- propre
 - quadrique affine, 223
 - quadrique projective, 239
- propriété
 - affine d'une courbe, 292, 304
 - bifocale, 233
 - globale, 292, 341
 - locale, 292, 341
 - métrique, 255, 292, 341
 - monofocale, 232
 - tangentielle des coniques, 235, 239, 287, 294
- pseudosphère, 347
- Ptolémée, 123
- puissance
 - d'un point par rapport à un cercle, 100
 - d'une inversion, 94
- pyramide, 156, 166
- Pythagore, 112
- Q**
 - quadratique
 - forme, 51, 265, 330
 - quadratrice de Dinostrate, 314
 - quadrature du cercle, 127, 133, 314
 - quadrilatère complet, 46, 70
 - quadrique, 222, 315
 - à l'infini, 283
 - à centre, 227
 - affine, 223, 278
 - affine propre, 223
 - dégénérée d'un faisceau, 247
 - en dimension 3, 278
 - homofocale, 288
 - projective, 239
 - projective propre, 239
 - réelle, 278, 283
- quaternions, 174
- queue d'aronde, 320
- R**
 - radical
 - axe, 103, 121, 132, 257, 264
 - rang
 - d'une forme quadratique, 268, 277
 - d'une matrice antisymétrique, 289
 - rappel
 - d'une homothétie, 18
 - d'une similitude, 89
 - rayon
 - de courbure, 300
 - du cercle circonscrit, 111, 124
 - du cercle inscrit, 124
 - rebroussement
 - point de, 303
 - réduite
 - équation, 231
 - réelle
 - conique, 289
 - cubique, 289
 - quadrique, 278, 283
 - réflexion, 54, 68, 263
 - règle, 127, 213
 - à calcul, 1
 - du parallélogramme, 10
 - réglée
 - surface, 277, 317, 344
 - régulier
 - point, 303, 319
 - polyèdre, 157
 - polygone, 156
 - régulière
 - courbe, 303
 - nappe, 319
 - rein, 299
 - relation
 - d'Euler, 124
 - métrique dans le triangle, 111
 - repère
 - affine, 13
 - projectif, 192, 216
 - révolution, 316
 - Riemann, 200, 341
 - rotation
 - dans l'espace, 143
 - plane, 63, 87
- S**
 - salle de bain, 170
 - Schmidt, 60, 72
 - Schwarz, 52, 67, 218
 - section conique, 282
 - selle
 - de cheval, 317, 330
 - de singe, 345
 - séparation, 169
 - signature d'une forme quadratique, 269
 - similitude
 - cas de, 120
 - directe, 90, 201
 - indirecte, 90
 - vectorielle, 89
 - simple
 - groupe, 164
 - simplicité de $O^+(3)$, 164
 - Simson, 117
 - singulier
 - point, 303, 320, 324, 345
 - sinus, 64
 - Snell, 308
 - soleil, 169, 270, 293, 308
 - somme des angles d'un triangle, 82, 153, 220
 - sommet, 154, 292, 345
 - d'une parabole, 231
 - sous-espace
 - affine, 11
 - engendré, 13, 181
 - projectif, 179
 - sous-espaces parallèles, 14