

Théorie *Jean-Pierre Derendinger*
quantique des champs

Presses polytechniques et universitaires romandes



La théorie quantique des champs, qui réunit relativité restreinte et mécanique quantique, est notamment à la base de la description des forces régissant la physique des particules élémentaires. La validité de cette description a été vérifiée jusqu'à un niveau de précision remarquable. L'ouvrage présente les rudiments du formalisme à la base de cette théorie des interactions fondamentales. Il s'adresse en priorité aux étudiants en physique des particules et aux physiciens d'autres domaines intéressés à connaître cette théorie. Une connaissance de la mécanique quantique et de la relativité restreinte est requise, au niveau d'étudiants de deuxième cycle en physique. L'accent est mis sur les applications physiques et les techniques de calcul sont en général exposées en détail.

Jean-Pierre Derendinger est titulaire d'un doctorat en physique théorique de l'Université de Genève obtenu en 1983. Il effectue ensuite différentes recherches dans le domaine de la théorie des interactions fondamentales au CERN, au Laboratoire de physique théorique de l'Ecole normale supérieure de Paris ainsi qu'à l'Ecole polytechnique fédérale de Zurich (EPFZ). Depuis 1990, il est professeur à l'Université de Neuchâtel.

ISBN 2-88074-491-1



9 782880 744915 >

Presses polytechniques et universitaires romandes

Théorie quantique des champs

Théorie *Jean-Pierre Derendinger* quantique des champs

Dans la même collection :

Mécanique quantique

Constantin Piron

Introduction au génie nucléaire

Jacques Ligou

Problèmes à N-corps et champs quantiques

Philippe A. Martin et François Rothen

Introduction à la physique des solides

Emanuel Mooser

Cristallographie

Dieter Schwarzenbach

Mécanique générale

Christian Gruber et Willy Benoit

Physique générale

François Rothen

Illustration de couverture :

Computer reconstructed events recorded with the ALEPH detector, CERN,
<http://alephwww.cern.ch>

Les Presses polytechniques et universitaires romandes sont une fondation scientifique dont le but est principalement la diffusion des travaux de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, de l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon ainsi que d'autres universités et écoles d'ingénieurs francophones. Le catalogue de leurs publications peut être obtenu par courrier aux Presses polytechniques et universitaires romandes, EPFL – Centre Midi, CH-1015 Lausanne, par E-Mail à ppur@epfl.ch, par téléphone au (0)21 693 41 40, ou par fax au (0)21 693 40 27.

www.ppur.org

© 2001, Presses polytechniques et universitaires romandes

CH – 1015 Lausanne

Tous droits réservés.

ISBN 2-88074-491-1

Imprimé en France

Reproduction, même partielle, sous quelque forme

ou sur quelque support que ce soit, interdite sans l'accord écrit de l'éditeur.

Table des matières

1	Théorie des champs classiques	1
1.1	Action, densité lagrangienne, équations du mouvement	2
1.2	Symétries internes et courants de Noether	4
1.3	Symétries d'espace-temps et théorème de Noether	7
1.3.1	Relativité restreinte: le groupe de Poincaré	7
1.3.2	Le champ scalaire	12
1.3.3	Le champ vectoriel	13
1.3.4	Le champ spinoriel	13
1.3.5	Masse et spin	15
1.3.6	Le tenseur énergie-impulsion	19
1.4	Equations du champ libre	22
1.4.1	Le champ de Klein-Gordon	23
1.4.2	Le champ de Dirac	25
1.5	Invariance de jauge et théories de jauge	35
	Références	44
	Exercices	44
2	Quantification canonique du champ libre	47
2.1	Principe	47
2.2	Champs scalaires	48
2.2.1	Le champ scalaire réel	49
2.2.2	Le champ scalaire complexe	55
2.3	Champs spinoriels	59
2.4	Champs de jauge	66
2.4.1	Quantification covariante	66
2.4.2	Un exemple de quantification non covariante: la jauge de radiation	78
2.5	Propagateurs	80
	Références	88
	Exercices	89

3	Processus élémentaires	91
3.1	Matrice S et théorie asymptotique	92
3.2	Réduction	95
3.2.1	Le champ scalaire réel	95
3.2.2	Fermions	100
3.2.3	Photons	104
3.3	Théorie des perturbations, diagrammes de Feynman	106
3.3.1	Une expression pour S et les fonctions de Green	106
3.3.2	Le théorème de Wick	112
3.3.3	Diagrammes de Feynman du champ scalaire réel	116
3.3.4	Diagrammes de Feynman de l'électrodynamique quantique	124
3.4	Grandeurs observables: sections efficaces, temps de vie	130
3.4.1	Collision de deux particules: section efficace	131
3.4.2	Désintégration d'une particule instable: largeur, temps de vie, rapports de branchement	136
3.4.3	Calculs d'espace de phase	137
	Références	142
	Exercices	143
4	Densités lagrangiennes phénoménologiques	145
4.1	Invariance ou violation de C , P et T	146
4.1.1	La conjugaison de charge C	146
4.1.2	Le spineur de Majorana	152
4.1.3	La parité P	154
4.1.4	Invariance ou violation de CP	157
4.1.5	Le renversement du temps T	159
4.1.6	La symétrie CPT	162
4.2	Interactions fortes et électromagnétiques: QCD et QED	163
4.3	Interactions dérivatives: règles de Feynman	168
4.4	Champs massifs de spin un	175
4.5	L'interaction faible des fermions	179
	Références	181
	Exercices	182
5	Applications	183
5.1	Annihilation électron-positon	184
5.2	Diffusion Compton	191
5.2.1	Diffusion électron-photon	191
5.2.2	Rayonnement de freinage (Bremsstrahlung)	195
5.2.3	Quark-gluon $\longrightarrow$ quark-gluon	196
5.3	Désintégrations du $W^\pm$ et du Z^0	199

5.3.1	Désintégration $W^- \longrightarrow \ell^- \bar{\nu}_\ell$	200
5.3.2	Désintégration $W^- \longrightarrow D_a \bar{U}_b$	202
5.3.3	Largeur totale, rapports de branchement	203
5.3.4	Désintégration du Z^0	203
5.4	Désintégration du muon	206
5.5	Diffusion profondément inélastique, modèle des partons	210
5.5.1	Diffusion électron-quark	210
5.5.2	Diffusion élastique électron-proton	212
5.5.3	Diffusion inélastique profonde	215
5.5.4	Partons	217
5.6	Désintégration en deux photons du boson de Higgs	218
5.6.1	Le modèle	220
5.6.2	Une densité lagrangienne effective	227
	Références	229
	Exercices	229
6	Renormalisation	231
6.1	Contre-termes et théorie des perturbations	232
6.2	L'électrodynamique à l'ordre d'une boucle: divergences	239
6.3	Régularisation dimensionnelle	243
6.3.1	La fonction gamma	243
6.3.2	Une intégrale en dimension n	244
6.3.3	D'autres intégrales	247
6.4	Régularisation dimensionnelle de l'électrodynamique	249
6.4.1	La densité lagrangienne	249
6.4.2	Propagateur du photon: polarisation du vide	251
6.4.3	Propagateur du fermion, self-énergie	253
6.4.4	Correction de vertex	257
6.4.5	Résumé	262
6.5	L'identité de Ward	264
6.6	Ordres plus élevés, renormalisabilité	267
6.7	Groupe de renormalisation, couplages effectifs	269
	Références	283
	Exercices	284
7	Symétrie spontanément brisée	287
7.1	Le théorème de Goldstone	287
7.2	Le mécanisme de Higgs	293
7.3	Un exemple: le doublet scalaire complexe	297
	Références	302
	Exercices	303

8 Le Modèle standard	305
8.1 Groupe et bosons de jauge	306
8.2 Quarks et leptons	307
8.3 Champs scalaires	309
8.4 Dérivées covariantes, densité lagrangienne	310
8.5 Mécanisme de Higgs et jauge unitaire	313
8.6 Paramètres et valeurs numériques	321
 Appendice A Formulaire, conventions et notations	 323
 Appendice B L'anomalie chirale	 333
 Bibliographie	 339
 Index	 345

Avant-propos

La théorie quantique des champs, qui intègre relativité restreinte et mécanique quantique, est à la base de la description des interactions des particules élémentaires. Son développement, dont l'origine remonte à la fin des années 1920, s'est longtemps concentré sur la physique des photons et des électrons, sur l'électrodynamique quantique. Après de nombreux détours et plusieurs crises, les interactions faibles et fortes des quarks et des leptons y ont trouvé aujourd'hui leur place. Seule subsiste l'aversion de la force de gravitation pour la théorie quantique des champs. . .

Ce texte d'introduction à la théorie quantique des champs est une synthèse du contenu de plusieurs cours de deuxième cycle ou postgrades donnés à l'Université de Neuchâtel, à l'Ecole Polytechnique Fédérale de Zürich et dans le cadre de l'enseignement postgrade commun aux universités suisses francophones ("Troisième cycle de la physique en Suisse romande"). Il est destiné en priorité aux étudiants doctorants en physique expérimentale des hautes énergies et aux étudiants du deuxième cycle avec une orientation en physique des particules ou en théorie. Il est admis que le lecteur dispose d'une bonne maîtrise de la mécanique quantique non relativiste. Dans une moindre mesure, des connaissances de base de la physique des particules peuvent aider à suivre certains exemples ou discussions. L'objectif est de développer les bases du formalisme de la théorie quantique des champs, le "minimum vital" permettant d'apprécier la structure de théories telles que l'électrodynamique quantique ou le Modèle standard et de les utiliser pour décrire des systèmes physiques simples. En revanche, les fondements phénoménologiques et historiques ou les tests expérimentaux des théories décrivant les interactions fondamentales ne sont pas abordés.

Dans l'optique d'une introduction au sujet, le texte a deux limitations principales. Premièrement, l'intégrale de chemin n'est pas utilisée, l'approche canonique est suivie. Cette option permet une progression plus rapide et plus adaptée aux connaissances de la majorité des étudiants. Deuxièmement, la quantification des théories de jauge non abéliennes n'est pas discutée, et ne sont envisagées que des applications perturbatives, dans le domaine relativiste.

La littérature traitant de la théorie quantique des champs est considérable, de haute qualité, avec un bon nombre d'ouvrages à la fois récents et complets. La bibliographie donne une liste étendue d'ouvrages de référence. Quelques lec-

tures d'approfondissement ou de complément sont en général suggérées à la fin des chapitres, ainsi que quelques exercices. Le lecteur désireux de perfectionner ses connaissances et sa dextérité saura se reporter à l'abondante littérature qui propose nombre de problèmes et d'exemples autres que ceux traités ici.

L'organisation de l'exposé est relativement traditionnelle. Le chapitre 1 passe en revue les aspects classiques utiles à la construction de la théorie quantique, y compris la dérivation de la densité lagrangienne d'une théorie invariante de jauge. Le chapitre 2 est consacré à la quantification canonique des champs libres, à la description des espaces d'états et des propagateurs causals. L'expansion perturbative (diagrammes de Feynman) de la théorie interactive fait l'objet du chapitre 3, l'accent étant mis sur le champ scalaire pour sa simplicité et sur l'électrodynamique quantique pour son importance. Ce chapitre fait également le lien avec les grandeurs mesurées (section efficace, largeur de désintégration, ...). Le chapitre 4 le complète par une discussion de quelques points absents de l'électrodynamique quantique mais requis par les interactions faibles ou fortes: champs massifs libres de spin un, interactions dérivatives; il rassemble aussi diverses notions plus proches de la phénoménologie et utiles à la formulation de modèles physiques: C , P , T , couleur et chromodynamique quantique, interactions faibles des fermions. Le chapitre 5 propose un choix d'exemples; il aborde aussi à un niveau élémentaire quelques notions marginales à la théorie des champs mais utiles en physique des particules (partons, facteurs de forme, fonctions de structure). La renormalisation est étudiée dans le chapitre 6, qui ne prétend cependant pas donner une présentation complète de cet important sujet. La discussion se concentre sur l'électrodynamique quantique à l'ordre d'une boucle et en régularisation dimensionnelle, avec une section consacrée au groupe de renormalisation. La brisure spontanée de la symétrie est le sujet du chapitre 7, presque uniquement au niveau classique puisque la quantification des théories non abéliennes n'a pas été traitée. La construction du Modèle standard des interactions fortes, faibles et électromagnétiques est présentée dans le dernier chapitre. Enfin, deux appendices contiennent les notations et conventions utilisées ainsi que quelques formules, et une brève discussion de l'anomalie chirale. Les chapitres 1, 2, 3, 5 et peut-être 6 forment ainsi l'ossature d'un cours d'introduction à la théorie quantique des champs.

L'aide de Philippe Page a été précieuse lors de l'élaboration de la première version des notes de cours. J'aimerais l'en remercier, ainsi que les collègues et étudiants qui ont contribué à l'amélioration du texte par leurs remarques et corrections. J'ai bénéficié des compétences de Liliane Deppierraz et Christophe Borlat lors de la réalisation finale de l'ouvrage. Je remercie enfin Nicole Derendinger pour son soutien, sa patience et l'aide apportée à la mise en informatique du manuscrit.

Chapitre 1

Théorie des champs classiques

Dans l’approche traditionnelle que nous suivrons, l’étude d’une théorie quantique des champs comprend deux phases. Il s’agit d’abord de construire la théorie, ce qui revient à formuler la *fonctionnelle d’action* S qui la définit. Un certain nombre de règles qui découlent du formalisme de la théorie des champs limitent les formes admissibles de l’action. Violer ces règles vide la deuxième phase, l’étude du contenu physique de la théorie, de toute signification. Le formalisme de la théorie quantique des champs permet avant tout d’extraire de l’action, traitée dans le cadre de la mécanique quantique relativiste, les quantités physiques observables, en général par le biais de la théorie des perturbations. Le but principal de ce cours est d’étudier ce formalisme, de développer les outils de la théorie des perturbations et de discuter les fonctionnelles d’action utiles à la description des interactions des particules élémentaires.

En fait, le contenu physique de la théorie est entièrement déterminé par le choix des champs et des symétries. La forme de la fonctionnelle d’action en découle¹. L’action elle-même n’a pas de signification physique propre. L’information physique se trouve dans la classification des champs et le contenu en symétries, qu’elles soient exactes ou spontanément brisées.

Dans le contexte de la théorie relativiste des champs qui nous intéresse ici, un champ est une fonction de l’espace-temps. Par exemple, dans la théorie de Maxwell, le champ électromagnétique $F_{\mu\nu}(\vec{x}, t)$ est un champ classique. Sa dynamique, fixée par les équations de Maxwell, est conforme au principe de relativité restreinte (les équations de Maxwell sont qualifiées de “covariantes relativistes”). La théorie de Maxwell est donc une théorie relativiste de champs classiques. La théorie quantique des champs considère des champs à valeurs opératoriels. Ce passage du champ classique à “l’opérateur de champ” est souvent qualifié de deuxième quantification.

Ce premier chapitre décrit brièvement les notions classiques à la base de la

¹Ce n’est que partiellement vrai si la théorie est supersymétrique.

théorie quantique des champs: la fonctionnelle d'action et le formalisme lagrangien, les symétries de l'action et les lois de conservation déduites du théorème de Noether, ainsi que les champs scalaires, vectoriels et spinoriels et les équations cinématiques de Klein-Gordon et Dirac. Le but est d'obtenir la fonctionnelle d'action la plus générale décrivant des champs de spins 0, 1/2 et 1 qui pourra être traitée dans le cadre de la théorie quantique des champs.

1.1 Action, densité lagrangienne, équations du mouvement

Les théories quantiques des champs utilisées pour décrire les interactions des particules élémentaires peuvent être formulées à partir d'un principe d'action qui est une simple généralisation de la situation rencontrée en mécanique classique. On pourrait également se donner les équations dynamiques qui découlent de l'action (les équations d'Euler-Lagrange) comme point de départ du formalisme. Mais il s'avère que l'utilisation de l'action simplifie la quantification de la théorie.

En mécanique classique, les équations du mouvement d'un système de particules ponctuelles sont obtenues à partir d'une action

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q(t), \dot{q}(t), t), \quad (1.1)$$

où L est la fonction de Lagrange. L'action S est une fonctionnelle de l'ensemble des coordonnées $q(t) = \{q_1(t), \dots, q_{3N}(t)\}$ des N particules du système (tridimensionnel) et de leurs vitesses $\dot{q}(t) = \{\dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_{3N}(t)\}$, au temps t . Le principe de moindre action postule que les trajectoires physiques sont celles pour lesquelles la fonctionnelle d'action S a un extremum, en général un minimum. Il en découle un ensemble d'équations différentielles, les équations d'Euler-Lagrange, qui sont les équations du mouvement du système: elles déterminent son évolution temporelle.

Pour les obtenir, supposons que la fonctionnelle S est stationnaire pour $q(t) = Q(t)$, et considérons des trajectoires différant peu de $Q(t)$ de la forme $q_\epsilon(t) = Q(t) + \epsilon \delta q(t)$. La quantité ϵ est un paramètre et on peut supposer que $\delta q(t)$ s'annule aux temps t_1 et t_2 ; $Q(t)$ et $q_\epsilon(t)$ coïncident donc aux temps t_1 et t_2 . La valeur de l'action pour les trajectoires q_ϵ est une fonction du paramètre ϵ , et la stationnarité de l'action pour $q(t) = Q(t)$ s'exprime par la condition

$$\left[\frac{d}{d\epsilon} S[q_\epsilon] \right]_{\epsilon=0} = 0. \quad (1.2)$$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\epsilon} S[q_\epsilon] &= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i(t)} \delta q_i(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)} \delta \dot{q}_i(t) \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)} \right) \delta q_i(t), \end{aligned}$$

en intégrant par parties avec $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$. Puisque $\delta q(t)$ est arbitraire pour $t_1 < t < t_2$, la condition de stationnarité implique les équations différentielles

$$\frac{\partial L}{\partial q_i(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)} = 0, \quad i = 1, \dots, 3N, \quad (1.3)$$

qui sont les équations d'Euler-Lagrange du système décrit par l'action S . Elles forment un système de $3N$ équations différentielles du deuxième ordre (au plus), en général couplées et non linéaires.

L'extension de ce formalisme à la dynamique de champs est immédiate. Considérons le cas le plus simple de champ classique: une fonction de l'espace-temps $\phi(x)$ à valeur dans les nombres réels ou complexes. Nous utilisons la notation suivante: x dénote le quadrivecteur de composantes x^μ , avec $x^0 = ct$ et le choix d'unités $c = 1$ ². Le système physique a maintenant un nombre infini de degrés de libertés: au lieu des $3N$ coordonnées $q_i(t)$, on considère à chaque temps t les valeurs du champ en chaque point de l'espace. Comme auparavant, une *action* et une *fonction de Lagrange* sont introduites,

$$S[\phi] = \int dt L \quad (1.4)$$

mais il convient d'utiliser également une *densité lagrangienne* $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ avec³

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi). \quad (1.5)$$

Le volume d'intégration ne sera pas spécifié plus précisément. Il dépend du système physique considéré et peut être fini ou infini. Donc

$$S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi). \quad (1.6)$$

Le principe de moindre action stipule que les champs physiques du système $\tilde{\phi}(x)$ correspondent aux extrema de l'action S . Par analogie avec le cas discret étudié plus haut, on considère l'action $S[\phi_\epsilon]$, avec $\phi_\epsilon = \tilde{\phi} + \epsilon \delta$, δ étant un champ quelconque s'annulant aux bords du volume d'intégration. Alors, puisque S est stationnaire en $\tilde{\phi}$,

$$\left[\frac{d}{d\epsilon} S[\phi_\epsilon] \right]_{\epsilon=0} = 0.$$

²L'ensemble des notations utilisées est défini dans l'appendice A.

³La densité lagrangienne peut en principe dépendre explicitement de x , $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x)$. Nous omettrons cette possibilité.

Après une intégration partielle utilisant l'annulation de δ aux bords du volume d'intégration, la dérivée est

$$\frac{d}{d\epsilon} S[\phi_\epsilon] = \int d^4x \left[\frac{\partial}{\partial \phi} \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) - \partial_\mu \frac{\partial}{\partial \partial_\mu \phi} \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \right]_{\phi=\phi_\epsilon} \delta. \quad (1.7)$$

Sauf mention contraire, la répétition d'un indice (ici l'indice μ) implique par convention une somme sur toutes ses valeurs. Comme le champ δ est arbitraire, la condition de stationnarité conduit à l'équation

$$\frac{\partial}{\partial \phi} \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) - \partial_\mu \frac{\partial}{\partial \partial_\mu \phi} \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = 0 \quad (1.8)$$

dont les champs physiques $\tilde{\phi}$ sont solutions. Par rapport au cas de la mécanique classique de particules ponctuelles, on a en fait une infinité d'équations d'Euler-Lagrange (vues comme des équations différentielles dans le temps), en chaque point spatial du volume du système physique considéré. Elles déterminent la dynamique spatio-temporelle du champ $\phi(x)$ puisque leurs solutions sont précisément les champs physiques $\tilde{\phi}(x)$. Lorsque la densité lagrangienne est fonction du champ et de ses premières dérivées uniquement, les équations d'Euler-Lagrange sont au plus du deuxième ordre. Ceci est suffisant pour décrire les interactions de champs relativistes quantifiés.

La généralisation au cas d'une action dépendant de plusieurs champs, notés collectivement $\phi^i(x)$, $i = 1, \dots, M$, est simple. A nouveau, puisque l'action est stationnaire pour les champs physiques $\tilde{\phi}^i(x)$, on aura

$$\left[\frac{d}{d\epsilon} S[\phi_\epsilon^i] \right]_{\epsilon=0} = 0, \quad (1.9)$$

où $\phi_\epsilon^i(x) = \tilde{\phi}^i(x) + \epsilon \delta^i(x)$. Cette équation est vraie pour des variations $\epsilon \delta^i(x)$ indépendantes et arbitraires de chaque champ, s'annulant au bord du volume d'intégration. On aura donc une équation d'Euler-Lagrange pour chaque champ $\phi_i(x)$ apparaissant dans la densité lagrangienne:

$$\frac{\partial}{\partial \phi^i} \mathcal{L}(\phi^j, \partial_\mu \phi^j) - \partial_\mu \frac{\partial}{\partial \partial_\mu \phi^i} \mathcal{L}(\phi^j, \partial_\mu \phi^j) = 0, \quad i = 1, \dots, M. \quad (1.10)$$

1.2 Symétries internes et courants de Noether

L'action S possède une symétrie s'il existe un ensemble de transformations des champs ϕ_i et des coordonnées d'espace-temps laissant S invariante. L'ensemble de toutes les symétries de l'action forme nécessairement un groupe de symétrie.

Considérons une théorie de champs classiques définie par l'action

$$S[\phi^j] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi^j, \partial_\mu \phi^j). \quad (1.11)$$

Les équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial \phi^i} \mathcal{L}(\phi^j, \partial_\mu \phi^j) - \partial_\mu \frac{\partial}{\partial \partial_\mu \phi^i} \mathcal{L}(\phi^j, \partial_\mu \phi^j) = 0, \quad (1.12)$$

déterminent la dynamique des M champs ϕ^j , $j = 1, \dots, M$. Supposons ensuite que cette action possède une *symétrie interne*, c'est-à-dire qu'il existe une (ou plusieurs) transformation agissant sur les champs selon

$$\phi^j(x) \longrightarrow \phi^j(x)' = U_k^j \phi^k(x) \quad (1.13)$$

(on somme, de 1 à M , sur les indices répétés). En général, la matrice U de dimension $(M \times M)$ n'est pas unique. L'ensemble des matrices U forme un groupe, $\mathcal{G}$. Cette symétrie est qualifiée d'*interne* puisqu'elle transforme les champs sans agir sur l'espace-temps: les coordonnées ne sont pas affectées par la transformation. C'est une symétrie qui commute avec les symétries d'espace-temps du groupe de Poincaré qui seront considérées dans la section suivante.

Une *symétrie* est une transformation qui laisse l'action invariante. Les symétries apparaissant dans les théories de champs décrivant les interactions des particules élémentaires sont de plusieurs types. Certaines sont *discrètes*, le groupe $\mathcal{G}$ possédant un nombre fini d'éléments. Les symétries continues correspondent à un groupe dont les éléments (les matrices U) sont des fonctions d'un nombre fini de paramètres continus α_I . Nous allons considérer des transformations qui sont des fonctions analytiques des paramètres α_I . Le groupe $\mathcal{G}$ est alors un *groupe de Lie*. On peut se restreindre à des transformations infinitésimales et poser

$$U_k^j = \delta_k^j + i\alpha_I (T^I)_k^j, \quad \phi^{j'} = \phi^j + \delta\phi^j, \quad \delta\phi^j = i\alpha_I (T^I)_k^j \phi^k, \quad (1.14)$$

les paramètres α_I étant infinitésimaux (on somme sur I). L'ensemble de matrices linéairement indépendantes T^I forme un ensemble de *générateurs de l'algèbre de Lie du groupe $\mathcal{G}$* . Les symétries continues sont de deux types. Lorsque les paramètres α_I sont indépendants du point de l'espace-temps, la symétrie est dite *globale*. Elle transforme les champs de la même façon dans tout l'espace-temps. Par exemple, le nombre baryonique et les nombres leptoniques sont des symétries globales du Modèle standard dans sa version minimale. Par contre, on peut envisager des transformations laissant l'action invariante et qui agissent différemment selon le point dans l'espace-temps:

$$\phi^j(x) \longrightarrow \phi^j(x)' = U_k^j(x) \phi^k(x). \quad (1.15)$$

Dans ce cas, les paramètres sont des fonctions $\alpha_I(x)$ et la transformation est une *symétrie de jauge*. Les théories de champs classiques invariantes de jauge seront étudiées dans la dernière section de ce chapitre.

Le lien entre groupe de Lie et algèbre de Lie peut se résumer comme suit. La transformation infinitésimale (1.14) peut être vue comme l'expansion au premier ordre dans les paramètres infinitésimaux α_I de l'élément du groupe $\mathcal{G}$

$$U(\alpha_I) \equiv e^{i\alpha_I T^I} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} (i\alpha_I T^I)^n. \quad (1.16)$$

Comme $\mathcal{G}$ est un groupe, la loi de groupe indique que

$$U(\alpha_I)U(\beta_I) = U(\gamma_I) \in \mathcal{G}.$$

D'autre part, pour deux matrices A et B , on a

$$e^A e^B = e^C, \quad C = A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \delta C$$

où la matrice δC contient une infinité de termes d'ordres plus élevés que A^2 , AB ou B^2 s'écrivant uniquement à partir de commutateurs. Pour des éléments du groupe de la forme (1.16), la loi de groupe devient

$$i\gamma_I T^I = i(\alpha_I + \beta_I)T^I - \frac{1}{2}\alpha_I \beta_J [T^I, T^J] + \text{commutateurs d'ordres plus élevés}.$$

Elle est donc équivalente à la donnée des relations de commutations

$$[T^I, T^J] = i f^{IJ}{}_K T^K, \quad (1.17)$$

qui définit l'algèbre de Lie du groupe $\mathcal{G}$. Les nombres $f^{IJ}{}_K$ sont les *constantes de structure* de l'algèbre de Lie. Ces notions joueront un rôle important dans la construction des théories de jauge non abéliennes (ou théories de Yang-Mills) qui sont à la base du Modèle standard des interactions fortes et électrofaibles.

Pour étudier certaines conséquences de l'invariance de l'action sous une transformation infinitésimale (1.14), il convient d'abord de remarquer que si S est invariante sous une transformation locale dont les paramètres α^I dépendent de x , S sera également invariante sous les transformations globales, pour lesquelles $\partial_\mu \alpha^I = 0$. L'invariance de l'action sous une transformation infinitésimale (1.14) globale s'exprime par les égalités suivantes:

$$\begin{aligned} 0 = \delta S[\phi^j] &= \int d^4x \delta \mathcal{L} = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^j} \delta \phi^j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^j} \partial_\mu (\delta \phi^j) \right] \\ &= \int d^4x \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^j} \delta \phi^j \right]. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Le dernier pas utilise le fait que les champs physiques sont solutions des équations d'Euler-Lagrange et n'est donc vrai que pour ces solutions. L'invariance de l'action, $\delta S = 0$, implique que la variation de la densité lagrangienne est au plus une dérivée totale d'une quantité qui s'annule au bord du volume d'intégration:

$$\delta \mathcal{L} = \partial_\mu V^\mu, \quad (1.19)$$

V^μ étant une fonction des champs ϕ^j et $\partial_\nu \phi^j$, et des paramètres α_I , qui sont arbitraires. Par conséquent,

$$\partial^\mu J_\mu = 0, \quad J_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^\mu \phi^j} \delta \phi^j - V_\mu \quad (1.20)$$

Le courant conservé J_μ dépend de l'ensemble des paramètres de la transformation de symétrie. Pour une transformation continue infinitésimale, au premier ordre en α_I , on a $\delta\phi^j = i\alpha_I(T^I)_k^j\phi^k$ et $V^\mu = \alpha_I V^{I\mu}$ si bien que l'invariance de l'action implique

$$\partial^\mu J_\mu^I = 0, \quad J_\mu^I = i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^\mu \phi_j} (T^I)_j^k \phi_k - V_\mu^I. \quad (1.21)$$

On a donc construit un courant conservé pour chacun des paramètres de la symétrie continue interne: c'est le *théorème de Noether* pour les symétries internes.

Par la suite, nous considérerons uniquement des symétries internes qui laissent la densité lagrangienne invariante. Le *courant de Noether* est alors donné par l'expression (1.21) avec $V_\mu^I = 0$.

L'équation de conservation des courants J_μ^I s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial t} J^{I0} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}^I = 0.$$

En prenant l'intégrale de cette équation sur un volume spatial V , on obtient

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3x J^{I0} = - \int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{J}^I = - \int_{\partial V} \vec{ds} \cdot \vec{J}^I. \quad (1.22)$$

Si le volume est choisi tel que le courant $\vec{J}^I$ s'annule sur son bord ∂V , on aura

$$\frac{d}{dt} Q^I(t) = 0, \quad Q^I(t) = \int_V d^3x J^{I0} = Q^I. \quad (1.23)$$

A chaque symétrie continue de l'action correspond un courant conservé et une charge totale Q^I indépendante du temps. La composante temporelle du courant joue le rôle de densité de charge.

1.3 Symétries d'espace-temps et théorème de Noether

1.3.1 Relativité restreinte: le groupe de Poincaré

Le principe de relativité restreinte impose que l'action soit invariante sous les transformations du *groupe de Poincaré*, qui comprend les translations d'espace-temps et les *transformations de Lorentz*. Sur les coordonnées d'espace-temps, l'action du groupe de Poincaré est

$$x^\mu \longrightarrow x^{\mu'} = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu, \quad (1.24)$$

où $\Lambda^\mu{}_\nu$ est une transformation de Lorentz. Chaque élément g est donc caractérisé par $g = (\Lambda, a)$. Il s'agit de transformations globales ($\Lambda^\mu{}_\nu$ et a^μ sont

indépendants de x^μ) qui peuvent être continues (translations, transformations de Lorentz propres) ou discrètes (parité, renversement du temps). Les transformations de Poincaré laissent invariant l'élément d'intervalle entre deux points proches x^μ et $x^\mu + dx^\mu$, qui s'écrit

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1.25)$$

$\eta_{\mu\nu}$ étant la métrique de Minkowski⁴. Les quantités dx^μ forment un vecteur contravariant par rapport aux transformations de Lorentz,

$$dx^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} dx^\nu = \Lambda^\mu{}_\nu dx^\nu, \quad (1.26)$$

d'après (1.24). La condition d'invariance de l'intervalle, $ds^2 = ds'^2$, exige

$$\Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma \eta_{\mu\nu} = \eta_{\rho\sigma}, \quad (1.27)$$

qui caractérise complètement les transformations de Lorentz. Elle contient dix conditions indépendantes qui réduisent à six le nombre de paramètres (continus) de la transformation de Lorentz. La transformation de Lorentz du vecteur covariant des dérivées partielles s'écrit

$$\partial_{\mu'} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu, \quad (1.28)$$

la dernière égalité définissant $\Lambda_\mu{}^\nu$, qui est l'inverse de $\Lambda^\mu{}_\nu$: $\Lambda_\mu{}^\nu \Lambda^\rho{}_\nu = \delta_\mu^\rho$. Il suit de (1.27) que

$$\Lambda_\mu{}^\nu = \eta_{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} \Lambda^\rho{}_\sigma, \quad (1.29)$$

où $\eta^{\mu\nu}$ est l'inverse de $\eta_{\mu\nu}$,

$$\eta^{\mu\nu} \eta_{\nu\rho} = \delta_\rho^\mu.$$

Les matrices $\eta^{\mu\nu}$ et $\eta_{\mu\nu}$ sont numériquement identiques. On les utilisera pour modifier la nature covariante ou contravariante d'un indice vectoriel puisque

$$\Lambda_\mu{}^\nu \eta_{\nu\rho} = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\rho.$$

Les indices seront donc “montés” en utilisant $\eta^{\mu\nu}$ et “abaissés” grâce à $\eta_{\mu\nu}$.

Il suit de (1.27) que toute matrice Λ peut se décomposer en un produit

$$\Lambda = \Lambda_D \Lambda_0 \quad (1.30)$$

avec $\Lambda_D = 1, P, T, PT$ alors que Λ_0 a déterminant unité et $\Lambda_0^0 \geq 1$. L'ensemble $L_+^\uparrow$ des matrices Λ_0 forme le sous-groupe des transformations de Lorentz *propres et orthochrones*. Les éléments discrets apparaissant dans Λ_D sont la parité

$$P : (x^0, \vec{x}) \longrightarrow (x^0, -\vec{x}), \quad (1.31)$$

⁴Les conventions utilisées sont définies dans l'appendice A.

et le renversement du temps

$$T : (x^0, \vec{x}) \longrightarrow (-x^0, \vec{x}), \quad (1.32)$$

Plutôt que de considérer directement l'équation de définition (1.27), il est souvent plus simple de se restreindre à une transformation infinitésimale,

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu + \eta^{\mu\rho} \omega_{\rho\nu}, \quad (1.33)$$

les quantités $\omega_{\rho\nu}$ étant supposées petites face à l'unité. Ceci n'est possible que pour une transformation de $L_+^\uparrow$, mais la décomposition (1.30) permet de discuter l'ensemble du groupe de Lorentz à partir de (1.33) et (1.30). Au premier ordre en ω , la condition (1.27) devient simplement

$$\omega_{\mu\nu} + \omega_{\nu\mu} = 0, \quad (1.34)$$

et ω est une matrice antisymétrique quelconque. Comme mentionné plus haut, le groupe de Lorentz a six paramètres continus, correspondant à trois angles de rotation et aux trois paramètres $\vec{v}/c$ apparaissant dans un “*boost*” (ou “glissement”) de Lorentz vers un référentiel inertiel de vitesse relative $\vec{v}$.

Nous allons par la suite utiliser la notion de générateurs de l'algèbre de Lie du groupe de Lorentz. Pour l'introduire, on pose

$$\delta x^\mu = \eta^{\mu\rho} \omega_{\rho\nu} x^\nu = \frac{1}{2} i \omega_{\rho\sigma} (M^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu x^\nu, \quad (1.35)$$

où les $M^{\rho\sigma} = -M^{\sigma\rho}$ sont des opérateurs agissant dans l'espace-temps, choisis indépendamment des paramètres $\omega_{\rho\sigma}$. D'après (1.35), il faut que

$$i(M^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu x^\nu = \eta^{\mu\rho} x^\sigma - \eta^{\mu\sigma} x^\rho.$$

La solution est de remplacer les $M^{\rho\sigma}$ par des opérateurs différentiels de la forme $(M^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu = (L^{\rho\sigma})\delta^\mu_\nu$, avec

$$L^{\rho\sigma} = i(x^\rho \partial^\sigma - x^\sigma \partial^\rho). \quad (1.36)$$

On vérifie que ces opérateurs satisfont l'algèbre de commutateurs

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = -i(\eta^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} + \eta^{\nu\sigma} M^{\mu\rho} - \eta^{\mu\sigma} M^{\nu\rho} - \eta^{\nu\rho} M^{\mu\sigma}). \quad (1.37)$$

Les relations de commutation (1.37) définissent l'algèbre de Lie du groupe de Lorentz dont les $M^{\mu\nu}$ sont les *générateurs* (qui forment une base de l'algèbre de Lie). Chaque réalisation des règles de commutation (1.37) correspond à une représentation particulière de l'algèbre de Lie. Par exemple, le choix (1.36) utilise des opérateurs différentiels agissant sur les coordonnées d'espace-temps. Un autre choix consisterait à représenter tous les générateurs par le nombre zéro. C'est une réalisation triviale de l'algèbre, en une dimension puisqu'un nombre réel représente chaque élément.

Par la suite, nous considérerons des représentations de l'algèbre de Lie (1.37) de la forme

$$M^{\mu\nu} = L^{\mu\nu} + S^{\mu\nu}, \quad (1.38)$$

les opérateurs $L^{\mu\nu}$ étant définis par (1.36) alors que les $S^{\mu\nu}$ forment une représentation matricielle de l'algèbre (1.37) qui commute avec $L^{\mu\nu}$. Nous aurons en effet à agir à la fois sur les coordonnées et sur les champs.

Il est facile d'étendre cette discussion aux translations

$$x^\mu \longrightarrow x^{\mu'} = x^\mu + a^\mu = x^\mu + a^\nu \partial_\nu x^\mu. \quad (1.39)$$

Les générateurs P_μ des translations sont introduits en posant

$$x^{\mu'} = x^\mu + \delta x^\mu, \quad \delta x^\mu = i(a^\nu P_\nu)x^\mu, \quad (1.40)$$

par analogie avec (1.35). D'après (1.39), les opérateurs différentiels

$$P_\mu = -i\partial_\mu \quad (1.41)$$

génèrent les translations. En utilisant les générateurs de Lorentz (1.36), on vérifie facilement que

$$\begin{aligned} [M_{\mu\nu}, P_\rho] &= i\eta_{\mu\rho}P_\nu - i\eta_{\nu\rho}P_\mu, \\ [P_\mu, P_\nu] &= 0. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Ces relations, associées à l'algèbre de Lorentz (1.37), forment l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré, dont les dix générateurs sont $M_{\mu\nu}$ et P_μ . Par la suite, une représentation générale de l'algèbre de Poincaré sera donnée par les opérateurs (1.38), (1.36) et (1.41). Ces équations sont essentielles pour caractériser le comportement des champs sous les transformations du groupe de Poincaré. Nous verrons plus loin que ce comportement est directement lié aux spins des champs en question.

Pour une théorie de champs classiques invariante relativiste, décrivant un ensemble de champs $\phi^i(x)$, il sera nécessaire de connaître l'action sur les champs des transformations du groupe de Poincaré:

$$\phi^i(x) \longrightarrow \phi^{i'}(x').$$

Il doit être possible de reconstruire le champ $\phi^{i'}$, dans les coordonnées $x^{\mu'}$, à partir des valeurs du champ $\phi^i(x)$. Nous n'utiliserons que des champs pour lesquels une relation linéaire

$$\phi^{i'}(x') = S(g)^i_j \phi^j(x) \quad (1.43)$$

existe. La matrice $S(g)$ dépend de l'élément (abstrait) $g = (\Lambda, a)$ du groupe de Poincaré utilisé pour transformer les coordonnées. Il s'agit d'une représentation linéaire du groupe de Poincaré. L'équation (1.43) donne la relation fonctionnelle définissant ϕ' . Le changement de coordonnées inverse exprime x^μ comme fonction de $x^{\mu'}$ et donc

$$\phi^{i'}(x') = S(g)^i_j \phi^j(x(x')). \quad (1.44)$$

Par exemple, pour une transformation de Lorentz $x^{\mu'} = \Lambda^\mu_{\nu} x^\nu$, ou matriciellement $x' = \Lambda x$, on a

$$\phi^{i'}(x') = S(g)^i_j \phi^j(\Lambda^{-1}x'), \quad (1.45)$$

ou encore

$$\phi^{i'}(\Lambda x) = S(g)^i_j \phi^j(x). \quad (1.46)$$

Pour une transformation infinitésimale,

$$x^{\mu'} = x^\mu + \delta x^\mu, \quad S(g)^i_j = \delta^i_j + \delta S(g)^i_j,$$

on aura, au premier ordre en δx^μ et $\delta S(g)$,

$$\begin{aligned} \phi^{i'}(x') &= \phi^{i'}(x^\mu + \delta x^\mu) = \phi^{i'}(x) + [\partial_\mu \phi^{i'}(x)] \delta x^\mu = \phi^{i'}(x) + [\partial_\mu \phi^i(x)] \delta x^\mu \\ &= \phi^i(x) + \delta S(g)^i_j \phi^j(x), \end{aligned}$$

d'après (1.43). Il y a donc une relation linéaire entre les fonction $\phi^{i'}$ et ϕ^i au point x :

$$\begin{aligned} \phi^{i'}(x) - \phi^i(x) &= \delta S(g)^i_j \phi^j(x) - \partial_\mu \phi^i(x) \delta x^\mu = [\delta S(g)^i_j - \delta x^\mu \partial_\mu \delta^i_j] \phi^j(x) \\ &= \delta S_0(g)^i_j \phi^j(x). \end{aligned} \quad (1.47)$$

La version infinitésimale de (1.43) s'écrit donc

$$\phi^{i'}(x') - \phi^i(x) = \delta S(g)^i_j \phi^j(x) = \delta S_0(g)^i_j \phi^j(x) + \delta x^\mu \partial_\mu \phi^i(x). \quad (1.48)$$

Le choix de $\delta S_0(g)$ caractérise complètement la transformation des champs. Pour élaborer ce point, nous allons considérer séparément les translations et les transformations de Lorentz.

Translations

Pour une translation $x' = x + a$, il est naturel de définir la valeur des champs $\phi^{i'}$ en x' comme étant simplement la valeur de ϕ^i en $x = x' - a$. On aura donc

$$\phi^{i'}(x') = \phi^i(x), \quad (1.49)$$

c'est-à-dire

$$S(g)^i_j = \delta^i_j, \quad \delta S(g)^i_j = 0. \quad (1.50)$$

D'autre part,

$$\phi^{i'}(x) = \phi^i(x - a) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} (-a^\mu \partial_\mu)^n \phi^i(x) = e^{-a^\mu \partial_\mu} \phi^i(x). \quad (1.51)$$

D'après (1.47) et pour a^μ infinitésimal, on obtient

$$\delta S_0(g)^i_j \phi^j(x) = -i a^\mu P_\mu \phi^i(x), \quad (1.52)$$

en utilisant les générateurs (1.41) des translations. Le même résultat découle de (1.50) inséré dans (1.48).

Transformations de Lorentz

Le traitement des transformations de Lorentz est plus compliqué puisqu'il faut en général intervenir des opérateurs $\delta S(g)$ non nuls. Une transformation infinitésimale s'écrit

$$x^{\mu'} = x^\mu + \delta x^\mu, \quad \delta x^\mu = \omega^{\mu\nu} x_\nu = \frac{1}{2} i \omega_{\rho\sigma} L^{\rho\sigma} x^\mu.$$

D'après (1.36), les opérateurs différentiels $L^{\mu\nu}$ sont donnés par $L^{\mu\nu} = i(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu)$. On observe ensuite que le dernier terme dans la transformation (1.48) peut s'écrire

$$\delta x^\mu \partial_\mu \phi^i(x) = \frac{1}{2} i \omega_{\mu\nu} L^{\mu\nu} \phi^i(x).$$

Nous allons alors poser

$$\delta S(g)^j_k = -\frac{1}{2} i \omega_{\rho\sigma} (S^{\rho\sigma})^j_k, \quad (1.53)$$

si bien que

$$\delta S_0(g)^j_k = -\frac{1}{2} i \omega_{\rho\sigma} [(S^{\rho\sigma})^j_k + L^{\rho\sigma} \delta_k^j] = -\frac{1}{2} i \omega_{\rho\sigma} (M^{\rho\sigma})^j_k. \quad (1.54)$$

C'est le choix des $S^{\rho\sigma}$ [ou de $\delta S(g)$] qui caractérise les transformations de Lorentz propres orthochrones des champs. Nous verrons plus loin que ce choix détermine également le spin (intrinsèque) des champs en question.

1.3.2 Le champ scalaire

Il s'agit du cas le plus simple pour lequel

$$\delta S(g) = 0 \longleftrightarrow S^{\mu\nu} = 0.$$

C'est la représentation triviale, de dimension 1, de l'algèbre de Lie. Elle agit donc sur un champ unique $\varphi(x)$ pour lequel

$$\varphi'(x') = \varphi(x), \quad (1.55)$$

comme dans le cas des translations. Nous verrons que le champ scalaire, qui peut être réel ou complexe, est sans spin.

1.3.3 Le champ vectoriel

Un *champ vectoriel* est un quadrivecteur de champs $V^\mu(x)$ dont la transformation de Lorentz utilise des générateurs $S^{\mu\nu}$ de la forme

$$(S^{\mu\nu})^\rho{}_\sigma = i(\eta^{\mu\rho}\delta^\nu_\sigma - \eta^{\nu\rho}\delta^\mu_\sigma). \quad (1.56)$$

On aura donc

$$\begin{aligned} V^{\mu'}(x') - V^\mu(x) &= \delta S(g)^\mu{}_\nu V^\nu(x) \\ &= -\frac{1}{2}i\omega_{\rho\sigma} [i\eta^{\mu\rho}\delta^\sigma_\nu - i\eta^{\mu\sigma}\delta^\rho_\nu] V^\nu(x) \\ &= \omega^{\mu\nu} V_\nu(x), \end{aligned} \quad (1.57)$$

où les indices sont abaissés ou élevés avec $\eta_{\mu\nu}$ ou $\eta^{\mu\nu}$, comme d'habitude. La transformation ci-dessus est identique à celle d'un quadrivecteur (contravariant ou covariant), d'où le nom de champ vectoriel.

Un champ vectoriel $V_\mu(x)$ se transforme de la même façon que le gradient d'un champ scalaire $\partial_\mu\phi(x)$, qui est donc un champ vectoriel particulier. En effet,

$$\partial_\mu\phi(x) \longrightarrow \partial'_\mu\phi'(x') = \Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu\phi(x).$$

Pour une transformation infinitésimale,

$$\partial'_\mu\phi'(x') - \partial_\mu\phi(x) = \omega_{\mu\nu}\partial^\nu\phi(x).$$

Nous verrons que $V_\mu(x)$ est utilisé dans la description d'une particule de spin unité.

1.3.4 Le champ spinoriel

Les *champs spinoriels* permettent de décrire la physique de particules de spin $1/2$. Il en existe une généralisation pour les spins demi-entiers plus élevés qui ne sera pas discutée ici. La construction des spineurs est plus sophistiquée que celle des champs tensoriels, tels que les champs scalaire et vectoriel. Nous nous bornerons à construire leurs transformations infinitésimales, c'est-à-dire à obtenir les générateurs $S^{\mu\nu}$. Ceux-ci utilisent les *matrices de Dirac*, qui satisfont l'algèbre d'anticommutateurs (*algèbre de Dirac*)

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}I. \quad (1.58)$$

Cette algèbre peut être représentée par des matrices (4×4) et I est la matrice identité en quatre dimensions. Un exemple de réalisation est le suivant:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.59)$$

où les matrices de Pauli sont notées σ_i et I_2 est la matrice unité en deux dimensions. Il s'agit de la représentation *chirale*, ou *de Weyl*.

En utilisant l'algèbre de Dirac (1.58), on vérifie facilement que les matrices

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (1.60)$$

vérifient l'algèbre de Lie du groupe de Lorentz (1.37). Elles forment donc les générateurs d'une représentation de l'algèbre (1.37) agissant sur un champ à quatre composantes

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \end{pmatrix}, \quad (1.61)$$

qui est un *spineur de Dirac*. Nous allons donc identifier les générateurs $S^{\mu\nu}$ apparaissant dans (1.53) avec les $\sigma^{\mu\nu}$ et la transformation de Lorentz du spineur de Dirac est donc

$$\begin{aligned} \psi(x) &\longrightarrow \psi'(x') = \psi(x) + \delta S(\omega)\psi(x), \\ \delta S(\omega) &= -\frac{1}{2}i\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (1.62)$$

Le champ de Dirac porte en fait une représentation réductible de l'algèbre de Lie du groupe de Lorentz. Pour le montrer, introduisons la matrice

$$\gamma_5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \quad (1.63)$$

qui satisfait

$$\gamma_5^\dagger = \gamma_5, \quad \gamma_5^2 = I_4, \quad \{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0. \quad (1.64)$$

Par conséquent,

$$[\gamma_5, \sigma^{\mu\nu}] = 0. \quad (1.65)$$

Il est alors possible de construire un ensemble complet de projecteurs orthogonaux

$$P_L = \frac{1}{2}(I_4 + \gamma_5), \quad P_R = \frac{1}{2}(I_4 - \gamma_5), \quad (1.66)$$

pour lesquels

$$P_L^2 = P_L, \quad P_R^2 = P_R, \quad P_L P_R = P_R P_L = 0, \quad P_L + P_R = I_4. \quad (1.67)$$

Les projecteurs commutent avec les générateurs:

$$[P_L, \sigma^{\mu\nu}] = [P_R, \sigma^{\mu\nu}] = 0. \quad (1.68)$$

Puisque les quatre valeurs propres de γ_5 sont 1, 1, -1, -1, les projecteurs permettent de définir deux spineurs à deux composantes

$$\psi_L = P_L \psi = P_L \psi_L, \quad \psi_R = P_R \psi = P_R \psi_R, \quad (1.69)$$

qui se transforment séparément sous le groupe de Lorentz:

$$\begin{aligned}\delta\psi_L &= -\frac{1}{2}i\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}P_L\psi = -\frac{1}{2}i\omega_{\mu\nu}P_L\sigma^{\mu\nu}\psi = P_L\delta\psi, \\ \delta\psi_R &= -\frac{1}{2}i\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}P_R\psi = -\frac{1}{2}i\omega_{\mu\nu}P_R\sigma^{\mu\nu}\psi = P_R\delta\psi.\end{aligned}\tag{1.70}$$

Les spineurs à deux composantes ψ_L et ψ_R peuvent être considérés comme des entités indépendantes puisqu'ils ont des transformations de Lorentz bien définies. Ce sont des *spineurs de Weyl*.

Les projecteurs P_L et P_R sont les *projecteurs de chiralité*; ψ_L et ψ_R sont les spineurs de chiralités gauche et droite. Dans la représentation chirale (1.59), la matrice γ_5 est diagonale:

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}.\tag{1.71}$$

On aura donc

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \chi_L \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_R = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_R \end{pmatrix},$$

en termes de spineurs à deux composantes χ_L et χ_R .

1.3.5 Masse et spin

Les champs scalaires, vectoriels et spinoriels possèdent des transformations de Poincaré bien définies, qui les caractérisent. Ils portent des représentations du groupe de Poincaré et de son algèbre de Lie. Ces représentations peuvent elles-mêmes être caractérisées au moyen des *opérateurs de Casimir*, au nombre de deux pour le groupe de Poincaré. Les opérateurs de Casimir commutent avec les dix générateurs P_μ et $M_{\mu\nu}$ de l'algèbre de Poincaré. Ils ont donc une valeur propre unique pour chaque représentation irréductible. De plus, ces valeurs propres sont des invariants (sous translations, rotations et “*boosts*” de Lorentz): ce sont des nombres quantiques intrinsèques (indépendants d'un choix de coordonnées) qui suffisent à caractériser la représentation du champ. Ces deux nombres quantiques sont la *masse* et le *spin* du champ (ou, plus généralement, de la représentation).

L'opérateur de Casimir dont la valeur propre est la masse est facile à construire. Comme le carré d'un quadrivecteur est un invariant, on choisit simplement l'opérateur

$$P^2 = P^\mu P_\mu = \eta_{\mu\nu} P^\mu P^\nu.\tag{1.72}$$

L'annulation du commutateur $[P^2, P^\mu]$ est triviale alors que

$$[P^2, M^{\mu\nu}] = \eta_{\rho\sigma} P^\rho [P^\sigma, M^{\mu\nu}] + \eta_{\rho\sigma} [P^\rho, M^{\mu\nu}] P^\sigma = 0,$$

en utilisant l'algèbre de Poincaré (1.42). La valeur propre de P^2 pour chaque champ irréductible sera

$$m^2 c^2,$$

m étant la *masse* du champ. Du point de vue du groupe de Poincaré, la valeur propre $m^2 c^2$ peut être un nombre réel quelconque, positif, nul ou négatif. Seules les valeurs propres nulles et positives sont observées dans la nature⁵.

Le deuxième opérateur de Casimir est plus subtil. Il est nécessaire d'introduire quatre opérateurs formant le vecteur de Pauli-Lubanski:

$$W_\mu = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} P^\nu M^{\rho\sigma}, \quad (1.73)$$

où $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ est complètement antisymétrique avec

$$\epsilon_{0123} = 1.$$

Les opérateurs W_μ ont les propriétés suivantes:

$$\begin{aligned} [W_\mu, P_\nu] &= 0, \\ [W_\mu, M_{\nu\rho}] &= -i(\eta_{\mu\nu} W_\rho - \eta_{\mu\rho} W_\nu) \\ [W_\mu, W_\nu] &= -i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} P^\rho W^\sigma. \end{aligned} \quad (1.74)$$

Ces relations se démontrent en utilisant les règles de commutation (1.37) et (1.42) de l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré. La deuxième indique que W_μ se transforme comme un quadrivecteur. Puisque le carré d'un quadrivecteur est un invariant, on définit ensuite

$$W^2 = W^\mu W_\mu. \quad (1.75)$$

Il suit des relations (1.74) que

$$[W^2, P^\mu] = [W^2, P^2] = [W^2, M^{\mu\nu}] = 0.$$

En prenant garde aux commutateurs (et à l'aide des identités de l'appendice A), l'opérateur W^2 s'écrit aussi

$$W^2 = -\frac{1}{2} (P^2 M^{\mu\nu} M_{\mu\nu} + 2P^\nu P_\rho M^{\rho\sigma} M_{\sigma\nu}). \quad (1.76)$$

Le second opérateur de Casimir de l'algèbre de Poincaré est donc W^2 . A nouveau, chaque champ portant une représentation irréductible de l'algèbre de Poincaré sera caractérisé par un nombre quantique correspondant à la valeur propre de W^2 dans cette représentation.

Finalement, l'algèbre de Poincaré admet six opérateurs mutuellement commutants: P^μ , P^2 et W^2 . On peut les diagonaliser simultanément et leur associer leurs valeurs propres respectives, p^μ , $p^2 = p^\mu p_\mu$ et λ_{W^2} .

Pour comprendre la signification du nombre quantique associé à W^2 , considérons un champ massif, c'est-à-dire une représentation irréductible pour laquelle la valeur propre de P^2 est $p^2 = m^2$, $m^2 > 0$, avec $c = 1$. Par transformation de Lorentz, on peut toujours choisir des coordonnées dans lesquelles

$$p^\mu = (m, 0, 0, 0) \quad (1.77)$$

⁵Une valeur négative signalerait un *tachyon*.

(référentiel “au repos”). Ce choix est invariant sous rotation d'espace, c'est-à-dire sous l'action des opérateurs M^{12} , M^{23} et M^{31} . On a alors

$$\begin{aligned} W^i &= -\frac{1}{2}m\epsilon^{0ijk}M_{jk}, & i, j, k &= 1, 2, 3, \\ W^0 &= 0. \end{aligned} \quad (1.78)$$

Explicitement, $W^1 = mM^{23}$, $W^2 = mM^{31}$, $W^3 = mM^{12}$ (puisque $\epsilon^{0123} = -\epsilon_{0123} = -1$). De plus, en utilisant la dernière équation (1.74), il vient

$$\begin{aligned} [W^i, W^j] &= i\epsilon^{ijk}mW^k \\ [W^i, W^0] &= 0. \end{aligned} \quad i, j, k = 1, 2, 3,$$

où $\epsilon^{ijk} = -\epsilon^{jik} = \epsilon^{kji}$, $\epsilon^{123} = 1$ et on somme sur les indices répétés. En posant

$$M^i = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}M_{jk} = \frac{1}{m}W^i, \quad (1.79)$$

il vient

$$[M^i, M^j] = i\epsilon^{ijk}M^k, \quad (1.80)$$

qui montre que les opérateurs $\vec{M} = (M^1, M^2, M^3)$ forment un moment cinétique quantique. Ensuite, comme

$$W^2 = W^\mu W_\mu = W^0 W^0 - \sum_{i=1}^3 W^i W^i = -m^2 \vec{M}^2 \quad (1.81)$$

dans les coordonnées choisies, et que les valeurs propres d'un moment cinétique quantique sont ($\hbar = 1$)

$$s(s+1),$$

s étant un nombre entier ou demi-entier positif ou nul, on obtient finalement que la valeur propre de W^2 est

$$-m^2 s(s+1) = \lambda_{W^2} \quad (m \neq 0) \quad s : \text{spin}. \quad (1.82)$$

Ce résultat est vrai dans n'importe quelles coordonnées puisque W^2 est un invariant du groupe de Poincaré. Par contre, la relation entre les opérateurs de moment cinétique M^i et les générateurs de Poincaré P^μ et $M^{\mu\nu}$ dépend des coordonnées.

Nous allons ensuite montrer que s est le *spin intrinsèque* du champ. Pour cela, il suffit de considérer la forme générale des opérateurs P^μ et $M^{\mu\nu}$ agissant sur les champs, qui est donnée par (1.41) et (1.54). Avec $M_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} + S_{\mu\nu}$, $L_{\mu\nu} = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)$ et $P_\mu = -i\partial_\mu$, il est clair que

$$W^\mu = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}P_\nu M_{\rho\sigma} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}P_\nu S_{\rho\sigma}.$$

La partie orbitale $L_{\mu\nu}$ ne contribue pas au vecteur de Pauli-Lubanski. Seule la partie $S_{\mu\nu}$, qui est de ce fait qualifiée de partie de spin, intervient. Le nombre s dans la valeur propre de W^2 est donc entièrement déterminé par le choix de

la transformation du champ (1.43), c'est le spin (intrinsèque) du champ. Et les trois opérateurs de moment cinétique apparaissant dans l'expression (1.81) sont en fait les opérateurs de spin

$$\vec{S} = (S^1, S^2, S^3) = (S^{23}, S^{31}, S^{12}). \quad (1.83)$$

Le cas de masse nulle demande quelques précautions. Lorsque $p^2 = 0$, on peut choisir des coordonnées telles que

$$p^\mu = (E, E, 0, 0). \quad (1.84)$$

Il suit de sa définition (1.73) que le vecteur W^μ est orthogonal à P^μ : $W^\mu P_\mu = 0$. Avec le choix ci-dessus, on peut alors poser

$$W_\mu = \lambda p_\mu + (0, 0, W_2, W_3), \quad W^\mu W_\mu = -(W_2)^2 - (W_3)^2.$$

Comme de plus (1.84) conduit à $[W_2, W_3] = 0$, il n'y a pas de contrainte quantifiant la valeur propre de $W^\mu W_\mu$ ("spin continu"). Les états de masse nulle observés dans la nature sont cependant ceux pour lesquels W_2 et W_3 s'annulent et

$$W_\mu = \lambda p_\mu, \quad W^2 = 0 \quad (m = 0). \quad (1.85)$$

La constante de proportionnalité est en général (lorsque W^μ agit sur plusieurs champs) une matrice dont les valeurs propres donnent l'hélicité des composantes du champ. Dans le référentiel (1.84), il vient

$$W^0 = W^1 = ES^{23}, \quad (1.86)$$

et les valeurs de l'hélicité sont simplement les valeurs propres de S^{23} . Notez que S^{23} est l'opérateur qui génère les rotations dans le plan (x^2, x^3) , qui laissent le vecteur (1.84) invariant. Dans un référentiel quelconque, l'hélicité est donnée par la projection du spin $\vec{S}$ le long de l'impulsion $\vec{p}$, c'est-à-dire par $\vec{p} \cdot \vec{S} |\vec{p}|^{-1}$. Dans le référentiel choisi, $\vec{p} = (E, 0, 0)$ et l'hélicité se réduit à $S^1 = S^{23}$.

Nous pouvons maintenant justifier les assertions sur les spins des champs scalaire, vectoriel et spinoriel faites dans la section précédente. Pour le champ scalaire, $S_{\mu\nu} = 0$, $W^\mu = 0$, et le spin est donc nul (de même que l'hélicité si la masse est nulle). Pour le champ vectoriel, les opérateurs $S_{\mu\nu}$ sont donnés par (1.56). En insérant $S_{\mu\nu}$ dans l'expression (1.76), on obtient la matrice

$$(W^2)^\alpha_\beta = -2[p^2 \delta^\alpha_\beta - p^\alpha p_\beta] \quad (1.87)$$

qui agit sur les composantes du champ vectoriel $V^\beta(x)$. Notez que p est un vecteur propre de W^2 avec valeur propre nulle: $(W^2)^\alpha_\beta p^\beta = 0$. Dans le cas massif, $P^2 = p^2 = m^2 > 0$, les valeurs propres de W^2 s'obtiennent de la manière suivante. Définissons

$$V^\mu(x) = V_T^\mu(x) + V_L^\mu(x),$$

$$V_T^\mu(x) = V^\mu - \frac{p^\nu V_\nu}{p^2} p^\mu,$$

$$V_L^\mu(x) = \frac{p^\nu V_\nu}{p^2} p^\mu.$$

La partie transverse $V_T^\beta(x)$ est orthogonale au vecteur p^μ , $V_T^\mu(x)p_\mu = 0$, alors que la partie longitudinale $V_L^\mu(x)$ est parallèle à l'impulsion p^μ . Il vient

$$\begin{aligned} (W^2)^\alpha{}_\beta V_T^\beta(x) &= -2m^2 V_T^\alpha(x), \\ (W^2)^\alpha{}_\beta V_L^\beta(x) &= 0. \end{aligned} \tag{1.88}$$

On obtient donc que les quatre composantes du champ vectoriel $V_\mu(x)$ correspondent aux trois composantes $V_T^\mu(x)$ transverses d'un champ de spin 1 ajoutées à un champ de spin nul, la partie longitudinale $V_L^\mu(x)$.

Pour un champ vectoriel sans masse, les valeurs propres de l'opérateur S^{23} [donné dans (1.56)] sont 0, 0, 1, -1: ce sont respectivement les hélicités des composantes $V^0, V^1, V^2 + iV^3$ et $V^2 - iV^3$ du champ vectoriel, dans le référentiel où $p^\mu = (E, E, 0, 0)$.

Finalement, un spineur de Dirac se transforme avec

$$S_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu].$$

Avec $P_\mu = -i\partial_\mu$, ces générateurs permettent de calculer l'opérateur W^2 , qui prend la forme d'une matrice (4×4) agissant sur les composantes du spineur. À partir de la forme (1.76), on obtient facilement

$$W^2 = -\frac{3}{4}m^2, \tag{1.89}$$

qui indique que le champ spinoriel a bien spin 1/2.

Si on utilise la représentation des matrices γ^μ (1.59) dans les coordonnées définies par (1.77), les opérateurs de spin (1.79) deviennent simplement

$$S^i = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sigma_i & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sigma_i \end{pmatrix}.$$

Chaque spineur de Weyl ψ_L et ψ_R correspond donc à un spin 1/2. Cette dernière égalité indique aussi que les valeurs de l'hélicité pour chaque spineur de Weyl de masse nulle sont +1/2 et -1/2.

1.3.6 Le tenseur énergie-impulsion

Nous avons vu que le théorème de Noether implique l'existence d'un courant conservé pour chaque symétrie interne continue de l'action. Ce théorème s'applique également aux symétries agissant sur l'espace-temps, et donc à l'invariance sous les transformations de Poincaré. La forme des courants conservés est cependant différente de celle donnée en (1.21), pour les symétries internes.

Dans cette section, nous allons construire les courants conservés associés à l'invariance sous translations. Ces courants jouent un rôle particulier puisqu'ils expriment la conservation de l'énergie et de l'impulsion. Ils fournissent également l'hamiltonien de la théorie de champs, qui sera utile par la suite.

L'invariance sous les transformations de Lorentz mène également à des lois de conservation que nous ne discuterons pas en détail ici. Alors que l'invariance sous rotations d'espace conduit simplement à la conservation du moment cinétique total des champs, les transformations de Lorentz qui mélangent temps et espace sont nécessairement plus subtiles: on ne peut discuter leurs lois de conservation en termes de charges indépendantes du temps et l'interprétation de ces lois perd son caractère intuitif. Elles correspondent à une généralisation à l'espace-temps quadri-dimensionnel de la conservation du moment cinétique total des champs, qui est une conséquence de l'invariance sous les rotations spatiales.

Considérons la quantité

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^\mu \phi^i} \partial_\nu \phi^i - \eta_{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (T_{\mu\nu} \neq T_{\nu\mu}). \quad (1.90)$$

Nous devons supposer que la densité lagrangienne ne dépend pas explicitement de x : $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi^i, \partial_\mu \phi^i)$. Elle est donc invariante (de forme) sous les translations. Nous voulons calculer la divergence $\partial^\mu T_{\mu\nu}$. Tout d'abord,

$$\partial^\mu [\eta_{\mu\nu} \mathcal{L}] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} \partial_\nu \phi^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\rho \phi^i} \partial_\nu \partial_\rho \phi^i.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \partial^\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^\mu \phi^i} \partial_\nu \phi^i \right] &= \left(\partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^\mu \phi^i} \right) \partial_\nu \phi^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^\mu \phi^i} \partial^\mu \partial_\nu \phi^i \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} \partial_\nu \phi^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^\mu \phi^i} \partial^\mu \partial_\nu \phi^i = \partial_\nu \mathcal{L}, \end{aligned}$$

en utilisant les équations du mouvement. Il vient donc

$$\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0, \quad (1.91)$$

et le *tenseur énergie-impulsion* $T_{\mu\nu}$ est conservé⁶.

Nous avons donc construit quatre (les valeurs de $\nu = 0, 1, 2, 3$) courants conservés. Nous allons maintenant montrer que les $T_{\mu\nu}$ sont les courants de Noether associés aux translations d'espace-temps

$$x^\mu \longrightarrow x^{\mu'} = x^\mu + a^\mu,$$

⁶Il s'agit du tenseur énergie-impulsion *canonique*, en général non symétrique (voir l'exercice 1.1).

qui forment un groupe de transformations continues à quatre paramètres. Nous nous placerons dans un cadre légèrement plus général en considérant des transformations infinitésimales des coordonnées de la forme

$$x^\mu \longrightarrow x^{\mu'} = x^\mu + \delta x^\mu, \quad (1.92)$$

où δx^μ peut dépendre de la position x . La transformation des champs associée est

$$\phi^i(x) \longrightarrow \phi^{i'}(x') = \phi^{i'}(x) + \delta x^\mu \partial_\mu \phi^i, \quad (1.93)$$

et donc

$$\delta \phi^i \equiv \phi^{i'}(x') - \phi^i(x) = \phi^{i'}(x) - \phi^i(x) + \delta x^\mu \partial_\mu \phi^i. \quad (1.94)$$

La variation fonctionnelle du champ sera notée

$$\delta_0 \phi^i = \phi^{i'}(x) - \phi^i(x), \quad \delta \phi^i = \delta_0 \phi^i + \delta x^\mu \partial_\mu \phi^i. \quad (1.95)$$

En regardant la densité lagrangienne comme un champ local, sa variation sera donc

$$\delta \mathcal{L} = \delta_0 \mathcal{L} + \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L}, \quad (1.96)$$

où

$$\delta_0 \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} \delta_0 \phi^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^i} \delta_0 \partial_\mu \phi^i.$$

Ensuite,

$$\delta_0 \partial_\mu \phi^i = \partial_\mu \delta_0 \phi^i,$$

si bien que

$$\delta \mathcal{L} = \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L} + \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^i} \delta_0 \phi^i \right] + \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^i} \right] \delta_0 \phi^i. \quad (1.97)$$

Le dernier terme s'annule pour des champs vérifiant les équations du mouvement. Finalement:

$$\delta \mathcal{L} = \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L} + \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^i} \delta_0 \phi^i \right]. \quad (1.98)$$

Il s'agit ensuite de considérer la variation de l'action. La transformation infinitésimale de d^4x est

$$d^4x \longrightarrow d^4x' = J d^4x$$

où le jacobien J est

$$J = \left| \det \left(\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} \right) \right| = 1 + \partial_\mu \delta x^\mu,$$

au premier ordre. Donc

$$\delta d^4x = d^4x \partial_\mu \delta x^\mu. \quad (1.99)$$

La variation de l'action s'écrit finalement

$$\delta S = \int (\mathcal{L} \delta d^4x + d^4x \delta \mathcal{L}) = \int d^4x \partial_\mu \left[\mathcal{L} \delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^i} \delta_0 \phi^i \right], \quad (1.100)$$

avec $\delta_0\phi^i = \delta\phi^i - \delta x^\mu \partial_\mu \phi^i$. L'invariance de l'action, $\delta S = 0$, implique donc à nouveau la conservation d'un ou plusieurs courants, selon le nombre de paramètres apparaissant dans la transformation de symétrie.

Notez que le résultat (1.100) généralise le théorème de Noether pour les symétries internes discuté dans la section précédente. Celui-ci s'obtient avec $\delta x^\mu = 0$ pour une symétrie interne.

Une translation est caractérisée par l'absence de transformation du champ:

$$\text{Translation : } \delta x^\mu = a^\mu, \quad \delta\phi^i = 0 \quad \delta_0\phi^i = -a^\mu \partial_\mu \phi^i.$$

Il vient alors

$$\delta S = \int d^4x \partial_\mu \left[\mathcal{L} \eta^{\mu\nu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^i} \partial^\nu \phi^i \right] a_\nu = 0 \quad (1.101)$$

pour des valeurs arbitraires des paramètres a^μ . Le tenseur énergie-impulsion

$$T^{\mu\nu} = -\mathcal{L} \eta^{\mu\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^i} \partial^\nu \phi^i \quad (1.102)$$

est donc conservé, $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Les quantités

$$P^\mu = \int_V d^3x T^{0\mu}, \quad (1.103)$$

qui sont les charges associées aux courants $T^{\mu\nu}$, sont indépendantes du temps si le volume spatial V est choisi de façon telle que le tenseur énergie-impulsion s'annule à son bord. Le quadrivecteur P^μ donne l'*impulsion totale* du système de champs contenu dans le volume V . Sa composante temporelle P^0 est l'énergie totale du système (c'est l'*hamiltonien* du système de champs) et

$$T^{00} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \phi^i} \partial^0 \phi^i - \mathcal{L}$$

est la densité d'énergie des champs.

1.4 Equations du champ libre

Dans la section précédente, nous avons construit des champs locaux de spin 0, 1/2 et 1. Il s'agit maintenant d'obtenir les équations décrivant leur propagation libre.

La propagation libre est évidemment contrôlée par l'impulsion du champ, p^μ , qui est obtenue en agissant sur le champ avec l'opérateur différentiel $P_\mu = -i\partial_\mu$. Les équations du mouvement sont donc des équations différentielles. La quantité de mouvement n'est pas arbitraire. La condition de "couche de masse",

$$p^2 = p^\mu p_\mu = m^2,$$

où m est la masse, doit être satisfaite. Pour un champ libre, on s'attend à obtenir des solutions sous la forme de superpositions d'ondes planes, de la forme $e^{\pm ipx}$.

Deux équations différentes sont utiles à la description des bosons et des fermions. Nous allons les discuter successivement. Elles peuvent être obtenues comme équations d'Euler-Lagrange des actions de Klein-Gordon et de Dirac.

1.4.1 Le champ de Klein-Gordon

L'équation relativiste la plus simple décrivant un champ libre est l'équation de Klein-Gordon. Son contenu physique est simplement d'imposer que le champ soit une superposition linéaire d'ondes planes (un paquet d'ondes) dont la propagation est conforme à la condition de couche de masse de la cinématique relativiste, $p^2 = m^2$. L'opérateur $P^2 - m^2$ étant représenté par

$$P^2 - m^2 = -(\square + m^2), \quad \square = \partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla},$$

l'équation de Klein-Gordon est simplement

$$(\square + m^2)\phi(x) = 0. \quad (1.104)$$

Comme l'opérateur $\square + m^2$ est invariant de Lorentz, on peut en principe l'appliquer à un champ de spin arbitraire. Elle s'applique en particulier au champ scalaire, sans spin, $\phi(x)$.

L'onde plane

$$e^{\pm ikx} = e^{\pm i(k^0 t - \vec{k} \cdot \vec{x})}$$

est une fonction propre de l'opérateur d'alembertien $\square$ avec valeur propre $-k^2$. Elle sera donc une solution de l'équation de Klein-Gordon pour autant que le quadrivecteur d'onde k^μ satisfasse la condition $k^2 = m^2$. La solution de l'équation (1.104) peut alors s'écrire

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4k \, c(k) e^{ikx} \delta(k^2 - m^2). \quad (1.105)$$

La fonction $c(k)$ détermine la composition en ondes planes du paquet d'ondes scalaire $\phi(x)$. Le caractère scalaire du champ ϕ est respecté par cette expression qui est manifestement invariante relativiste. La distribution de Dirac permet d'intégrer sur k^0 . En définissant

$$\omega_k = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2},$$

il vient

$$\delta(k^2 - m^2) = \delta((k^0)^2 - \omega_k^2) = \frac{1}{2\omega_k} [\delta(k^0 - \omega_k) + \delta(k^0 + \omega_k)], \quad (1.106)$$

et

$$\phi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left[c(\omega_k, \vec{k}) e^{i(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{x})} + c(-\omega_k, \vec{k}) e^{-i(\omega_k t + \vec{k} \cdot \vec{x})} \right].$$

Avec le changement de variable $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$ dans le second terme et en définissant

$$a(\vec{k}) = c(-\omega_k, -\vec{k}), \quad b(\vec{k}) = c(\omega_k, \vec{k}),$$

on obtient finalement

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left[a(\vec{k}) e^{-ikx} + b(\vec{k}) e^{+ikx} \right] \quad k = (\omega_k, \vec{k}) \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left[a(\vec{k}) e^{-i(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{x})} + b(\vec{k}) e^{+i(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \right], \end{aligned} \quad (1.107)$$

qui est la forme de la solution que nous utiliserons par la suite. Il est à noter que malgré les apparences, la mesure d'intégration $\frac{d^3k}{2\omega_k}$ est invariante de Lorentz: c'est une conséquence des égalités (1.106). Pour différencier les deux termes, on utilise couramment la terminologie suivante:

- onde d'énergie positive: e^{-ikx} , avec $k = (\omega_k, \vec{k})$. Comme l'onde est de la forme $e^{-i(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{x})}$, le vecteur $\vec{k}$ est l'impulsion spatiale de l'onde.
- onde d'énergie négative: e^{+ikx} , avec $k = (\omega_k, \vec{k})$ également. L'onde est de la forme $e^{-i(-\omega_k t + \vec{k} \cdot \vec{x})}$ et on dira que $-\vec{k}$ est l'impulsion (spatiale) de l'onde d'énergie négative $-\omega_k$.

L'intérêt et la signification de cette convention peu intuitive apparaîtront lors de la quantification du champ.

La solution générale de l'équation de Klein-Gordon pour un champ scalaire réel est donnée par l'équation (1.107), avec $b(\vec{k}) = a(\vec{k})^*$.

L'équation de Klein-Gordon pour le champ complexe $\phi(x)$ est l'équation d'Euler-Lagrange de la densité lagrangienne

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^*)(\partial_\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi. \quad (1.108)$$

Cette densité lagrangienne possède une symétrie: elle est invariante sous les rotations de la phase du champ complexe

$$\phi(x) \longrightarrow \phi(x)' = e^{i\alpha} \phi(x), \quad (1.109)$$

α étant un nombre réel. Comme il s'agit d'une symétrie globale continue, le théorème de Noether implique l'existence d'un courant conservé et d'une charge indépendante du temps. Le courant s'écrit

$$\alpha j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^*} \delta \phi^* = (\partial^\mu \phi^*) i \alpha \phi - (\partial^\mu \phi) i \alpha \phi^*.$$