Yves Biollay • Amel Chaabouni • Joachim Stubbe

Bien commencer ses études à l'EPFL

Savoir-faire en MATHS

Presses polytechniques et universitaires romandes

PPUR, votre éditeur de références

La rentrée en confiance

Vous débutez vos études à l'EPFL, et vous découvrez des espaces nouveaux, rythmés et organisés par une multitude d'acronymes abstraits avec lesquels vous allez peu à peu vous familiariser. L'un d'eux en particulier va vous accompagner tout au long de vos études : « PPUR ». Les Presses polytechniques et universitaires romandes sont une fondation dont l'objectif principal est de vous procurer des supports de cours clairs, rigoureux et durables. Le soin tout particulier apporté à leur réalisation permet à ces livres de devenir des compagnons d'étude indispensables, et dont la durée de vie peut se prolonger bien après le diplôme. Les PPUR éditent et diffusent principalement les travaux de l'EPFL, mais aussi ceux d'autres universités francophones: manuels de cours, ouvrages de recherche ou de référence, actes de congrès ou de séminaires, ouvrages de réflexion sur la technique ou la science.

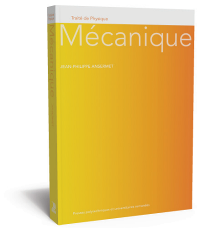
30% de réduction aux étudiant(e)s!

Parmi les 700 ouvrages du fonds PPUR, de nombreux titres constituent des supports de cours incontournables de l'EPFL, obligatoires ou recommandés. En tant qu'étudiant EPFL vous pourrez consulter et acquérir tous nos ouvrages à la librairie La Fontaine (Rolex Learning Center) avec une remise de 30%, rendue possible grâce au soutien de l'Ecole. Cette remise exceptionnelle, valable sur présentation de votre carte d'étudiant(e), est toutefois limitée à l'achat d'un seul exemplaire par titre.

Bienvenue à l'EPFL !
Presses polytechniques et universitaires romandes

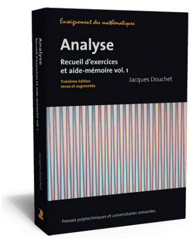
Quelques indispensables de la rentrée :

Mécanique
Jean-Phlippe Ansermet
(EPFL, SB)

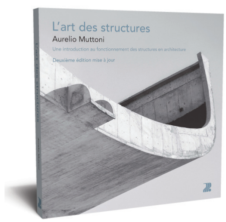


Exercices de chimie générale
Christos Comninellis, Claude K.W. Friedli
et Araksi Sahil-Migirdicyan (EPFL, SB)

Analyse (volume 1)
Recueil d'exercices et aide-mémoire
Jacques Douchet (EPFL, SB)



L'art des structures
Une introduction au fonctionnement des structures en architecture
Aurelio Muttoni (EPFL, ENAC)



Pour plus d'informations: www.ppur.org

Bien commencer
ses études à l'EPFL

savoir-faire en

MATHS

Yves Biollay • Amel Chaabouni • Joachim Stubbe

Bien commencer ses études à l'EPFL

Savoir-faire en MATHS

Presses polytechniques et universitaires romandes

Dans la collection «Enseignement des mathématiques»
dirigée par le professeur Robert C. Dalang

Calcul différentiel et intégral
Jacques Douchet et Bruno Zwahlen
Algèbre linéaire
Renzo Cairoli

Cours d'analyse, 3 volumes
Srishti D. Chatterji

Algèbre linéaire
Robert C. Dalang et Amel Chaabouni
Recherche opérationnelle pour ingénieurs I et II
Jean-François Hêche, Thomas M. Liebling, Dominique de Werra

Analyse, Recueil d'exercices et aide-mémoire vol. 1 et 2
Jacques Douchet

Analyse avancée pour ingénieurs
Bernard Dacorogna, Chiara Tanteri

Introduction à l'analyse numérique
Jacques Rappaz et Marco Picasso

Introduction à l'optimisation différentiable
Michel Bierlaire

Initiation aux probabilités
Sheldon M. Ross

Les Presses polytechniques et universitaires romandes sont une fondation scientifique dont le but est principalement la diffusion des travaux de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne ainsi que d'autres universités et écoles d'ingénieurs francophones.
Le catalogue de leurs publications peut être obtenu par courrier aux Presses polytechniques et universitaires romandes,
EPFL – Rolex Learning Center, CH-1015 Lausanne, par e-mail à ppur@epfl.ch,
par téléphone au (0)21 693 41 40, ou par fax au (0)21 693 40 27.

www.ppur.org

ISBN 978-2-88074-779-4

Imprimé en Italie

Préface

Les mathématiques jouent un rôle essentiel dans le monde contemporain, dans des domaines aussi variés que la technologie, l'ingénierie, les communications, la finance, la recherche scientifique, etc. Il n'est donc pas surprenant que les mathématiques soient l'un des piliers des études scientifiques et d'ingénieur à l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne (EPFL).

Ce manuel a été conçu pour aider les étudiants à bien réussir leur première année d'études à l'EPFL. Il peut être utile à la fois comme préparation avant d'entamer les études et comme support durant la première année. Il présente des concepts de base des mathématiques, sous la forme de problèmes à résoudre aussi bien que de notions théoriques. Souvent, ces sujets ont déjà été étudiés, mais on a constaté de grandes différences entre les étudiants, les uns présentant des lacunes, alors que d'autres semblent plus à l'aise. Cet ouvrage fournit ainsi un support utile à tous.

On notera que ce manuel n'est pas un exposé détaillé et qu'il n'est pas prévu pour remplacer d'autres ouvrages. Il est plutôt un outil qui devrait permettre de tester les capacités à *résoudre* un problème donné, en faisant appel au raisonnement autant qu'aux connaissances. C'est d'ailleurs pour cette raison qu'il commence par des problèmes de révision.

Si, après quelque temps de réflexion, certaines méthodes de résolution font défaut à l'étudiant, la partie théorique de cet ouvrage devrait lui fournir le fil conducteur de la solution ou contribuer à lui rafraîchir la mémoire. Pour cette raison, les chapitres sont tous structurés de la même manière, en trois parties :

1) énoncés des exercices ;
2) notions théoriques liées aux exercices ;
3) solutions des exercices, plus ou moins détaillées.

Ce qui est essentiel pour l'étudiant qui résout tel ou tel problème proposé est de se rendre compte des éventuelles lacunes qui pourraient se révéler.

Par conséquent, l'important n'est pas de mémoriser le plus grand nombre de résolutions apparaissant dans ce volume, mais d'acquérir un savoir-faire dans chacun des sujets traités.

L'EPFL remercie les trois auteurs, Yves Biollay, Amel Chaabouni et Joachim Stubbe, pour leur patient et remarquable travail d'élaboration de ce manuel.

Section de mathématiques de l'EPFL

Connaissances préalables requises

Il est important que l'étudiant sache quels sont les sujets qui ne seront pas enseignés durant la première année à l'EPFL et ce qui est attendu de lui. Voici l'essentiel :

- Les notions de base de géométrie du plan et de l'espace sont supposées connues. Elles apparaissent dans les sections 4.1 et 4.2.
- Les principes fondamentaux de la trigonométrie et du calcul des fonctions trigonométriques sont aussi considérés comme acquis. Ils sont présentés dans le chapitre 5.
- Pour le reste, les notions développées dans les autres chapitres de ce manuel ne font pas formellement partie des connaissances préalables requises. En effet, elles sont reprises, approfondies et généralisées durant les cours de première année de l'EPFL (cours d'analyse du premier semestre et cours d'algèbre linéaire). Cependant, elles sont traitées à un rythme rapide et soutenu et elles ne sont exposées qu'une seule fois, ce qui correspond aux exigences habituelles du travail universitaire. Par conséquent, il est très utile que les futurs étudiants aient déjà rencontré certains de ces sujets. Lorsque des notions ont été vues, même succinctement ou rapidement, il est d'autant plus facile de les revoir et de les assimiler en profondeur.
- Il est impossible de fixer de manière rigide une liste de connaissances préalables requises, d'une part en raison des bagages très variés des étudiants qui commencent l'EPFL et qui proviennent d'horizons divers, mais aussi et surtout parce que la possibilité de suivre avec succès des études universitaires dépend beaucoup plus d'autres facteurs que d'une liste de connaissances préalables. Parmi ces facteurs, mentionnons la capacité de travailler de manière autonome, l'aptitude au raisonnement, la rapidité d'apprentissage, la ténacité dans la résolution de problèmes, la curiosité intellectuelle, l'indépendance, qui sont toutes des qualités intrinsèques de l'étudiant qui ne peuvent se réduire à un inventaire de connaissances.
- Notons enfin qu'une très bonne accointance avec les notions étudiées dans l'enseignement secondaire supérieur et un solide bagage en mathématiques sont autant d'atouts pour bien réussir les études. Cependant, l'expérience montre aussi qu'un déficit initial peut être comblé par un étudiant motivé lorsqu'il s'investit fortement dès le début de l'année.

Table des matières

Préface v

Connaissances préalables requises . . . vii

Problèmes de révision 1

Sujet principal de chaque problème . . . 1
Enoncés des problèmes de révision . . . 2
Solutions des problèmes de révision . . . 7

CHAPITRE 1 Opérations, structure des nombres 23

Exercices . . . 23
Notions théoriques . . . 26
1.1 Classification des nombres . . . 26
1.2 Opérations sur les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ . . . 28
1.3 Relation d'ordre . . . 29
1.4 Division polynomiale . . . 30
1.5 Décomposition en éléments simples . . . 31
1.6 Puissances et racines . . . 32
1.7 Exponentiel et logarithme . . . 33
1.8 Intervalles . . . 34
1.9 Valeur absolue . . . 35
1.10 Différents types de démonstrations . . . 36
1.10.1 Démonstration directe . . . 36
1.10.2 Démonstration par l'absurde . . . 36
1.10.3 Démonstration par récurrence ou induction . . . 37
1.10.4 Rôle des hypothèses, conditions nécessaires et suffisantes . . . 38
1.11 Notions de la théorie des ensembles . . . 39
1.12 Introduction à l'analyse combinatoire . . . 40

1.13 Nombres complexes 41
1.13.1 Opérations sur $\mathbb{C}$ 42
1.13.2 Représentation polaire des nombres complexes 43
1.13.3 Racines d'un nombre complexe 44
Solutions des exercices 45

Chapitre 2 Résolution des équations 53

Exercices 53
Notions théoriques 55
2.1 Equations algébriques 55
2.1.1 Equations linéaires 56
2.1.2 Equations de degré deux 57
2.2 Equations transcendentes 58
2.2.1 Equations exponentielles 58
2.2.2 Equations logarithmiques 58
2.3 Systèmes d'équations linéaires 59
2.3.1 Deux équations à deux inconnues 59
2.3.2 Trois équations à trois inconnues 60
2.4 Systèmes d'équations non linéaires 61
2.4.1 Une équation linéaire et une équation quadratique 61
2.4.2 Deux équations quadratiques 61
2.5 Inégalités 62
2.5.1 Inéquations linéaires 62
2.5.2 Inéquations quadratiques 62
2.5.3 Inéquations à deux variables 63
2.5.4 Inégalités remarquables 63
Solutions des exercices 65

Chapitre 3 Fonctions 69

Exercices 69
Notions théoriques 70
3.1 Notions générales 70
3.2 Fonctions réelles 72
3.3 Fonctions réelles particulières 74
Solutions des exercices 77

Chapitre 4 Géométrie 81

Exercices ... 81
Notions théoriques ... 84
4.1 Géométrie plane ... 84
4.1.1 Notions de base ... 84
4.1.2 Calcul des aires ... 90
4.1.3 Systèmes de coordonnées ... 91
4.1.4 Equations cartésienne et polaire d'une droite ... 92
4.1.5 Equations cartésienne et polaire d'un cercle ... 93
4.1.6 Représentation paramétrique d'une courbe ... 94
4.1.7 Sections coniques ... 95
4.2 Géométrie dans l'espace ... 99
4.2.1 Notions de base ... 99
4.2.2 Calcul de volumes et de surfaces ... 101
4.2.3 Equation cartésienne d'un plan ... 103
4.2.4 Equations cartésiennes d'une droite ... 103
4.2.5 Equation cartésienne d'une sphère ... 103
4.3 Géométrie vectorielle ... 104
4.3.1 Vecteurs ... 104
4.3.2 Géométrie vectorielle dans le plan ... 110
4.3.3 Géométrie vectorielle dans l'espace ... 111
Solutions des exercices ... 114

Chapitre 5 Trigonométrie 119

Exercices ... 119
Notions théoriques ... 122
5.1 Mesures d'angles et longueur d'arc ... 122
5.2 Fonctions trigonométriques dans un triangle rectangle ... 123
5.3 Cercle trigonométrique ... 124
5.4 Valeurs pour des angles particuliers ... 125
5.5 Courbes représentatives ... 126
5.6 Formules ... 127
5.7 Fonctions réciproques ... 131
5.8 Equations trigonométriques ... 132

5.9 Relations trigonométriques
dans un triangle quelconque 133
Solutions des exercices 134

CHAPITRE 6 Suites, séries numériques et limites 141
Exercices 141
Notions théoriques 144
6.1 Ensembles 144
6.2 Suites 145
6.2.1 Critères de convergence 147
6.2.2 Suites récurrentes 147
6.3 Séries 149
6.3.1 Exemples de séries 150
6.4 Limite d'une fonction et fonction continue 150
6.5 Asymptotes 153
Solutions des exercices 154

CHAPITRE 7 Calcul différentiel 161
Exercices 161
Notions théoriques 163
7.1 Notions fondamentales 163
7.2 Règles de dérivation 167
7.3 Théorèmes 168
7.4 Dérivées d'ordre supérieur 169
7.4.1 Caractérisation des extrema 170
7.4.2 Variations locales du graphe de f 171
Solutions des exercices 171

CHAPITRE 8 Calcul intégral 177
Exercices 177
Notions théoriques 179
8.1 Primitive 179
8.2 Intégrale définie 180
8.3 Techniques d'intégration 182
Solutions des exercices 183

CHAPITRE 9 Calcul matriciel 187
Exercices 187
Notions théoriques 189

9.1 Notions de bases . . . 189
9.2 Opérations sur les matrices . . . 190
9.2.1 Somme de deux matrices . . . 190
9.2.2 Multiplication d'une matrice par un nombre réel . . . 190
9.2.3 Produit de deux matrices . . . 191
9.2.4 Matrice transposée . . . 192
9.2.5 Déterminant des matrices 2×2 et 3×3 . . . 192
9.2.6 Inverse d'une matrice carrée d'ordre $\leqslant 3$ . . . 194
9.3 Applications du calcul matriciel . . . 195
9.3.1 Résolution des systèmes linéaires de trois équations à trois inconnues . . . 196
Solutions des exercices . . . 196

Bibliographie 199

Index 201

Problèmes de révision

Sujet principal de chaque problème

PR.1 Démonstration par récurrence.

PR.2 Résolution d'inéquations.

PR.3 Application de l'intégration au calcul d'aire sous une courbe.

PR.4 Extremum et dérivation.

PR.5 Fractions rationnelles : intégration.

PR.6 Trigonométrie : théorèmes et formules.

PR.7 Géométrie analytique : droites et cercles.

PR.8 Extremums d'une fonction rationnelle.

PR.9 Asymptotes.

PR.10 Extremums d'une fonction.

PR.11 Limites à l'infini.

PR.12 Limites.

PR.13 Nombres rationnels.

PR.14 Nombres naturels.

PR.15 Valeur absolue.

PR.16 Logarithme.

PR.17 Analyse combinatoire.

PR.18 Equation irrationnelle.

PR.19 Représentation paramétrique du cercle.

PR.20 Formule de Heron.

PR.21 Fonctions trigonométriques réciproques.

PR.22 Suite convergente.

PR.23 Tangentes communes.

PR.24 Etudes de fonctions.

PR.25 Problème 1 (obligatoire) du sujet de mathématiques niveau normal de l'examen fédéral de maturité, automne 2004.

PR.26 Problème 1 : analyse (obligatoire) du sujet de mathématiques niveau avancé de l'examen fédéral de maturité, printemps 2004.

PR.27 Problème 1 : géométrie (obligatoire) du sujet de mathématiques niveau supérieur de l'examen fédéral de maturité, automne 2005.

Enoncés des problèmes de révision

EPR.1 Montrer que le nombre $N_n = n^5 - n$ est divisible par 5 pour tout n nombre naturel > 1.

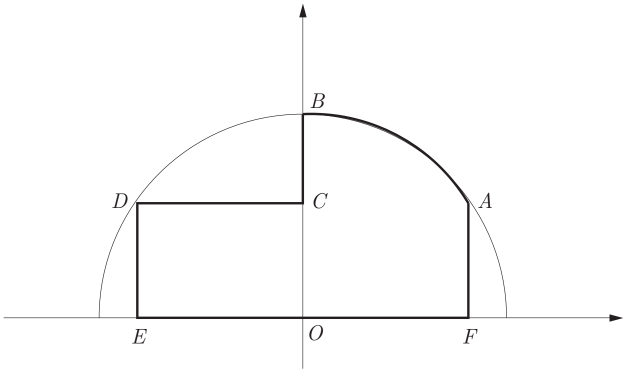
EPR.2 On considère un rectangle $ABCD$ ayant le côté AB plus petit que le côté BC, d'aire égale à 48 cm^2 et inscrit dans un cercle de rayon 5 cm. On place un point E sur le côté CD à x cm de C ($x > 0$) et un point F sur le côté CB à px cm de C ($p > 0$). Déterminer les valeurs de p pour lesquelles on peut construire un triangle isocèle AEF de base EF.

EPR.3 Calculer l'aire A du domaine limité par le graphe de la fonction

$$g(x) = \frac{7 - 2e^x - 3e^{-x}}{e^{-x} - 2}$$

l'axe Ox et les droites $x = \ln 2$ et $x = 3\ln 2$.

EPR.4 Soient Γ le demi-cercle de rayon 1 centré à l'origine, A un point de Γ d'abscisse $a > 0$, D son symétrique par rapport à l'axe Oy, E et F respectivement les projections de D et A sur l'axe Ox, C la projection de A sur l'axe Oy et B l'intersection de l'axe Oy avec l'arc AD de Γ. Déterminer pour quelle valeur de a l'aire $ABCDEFA$ (voir figure ci-contre) est maximale.



EPR.5 a) Montrer que $\frac{(x+1)^3}{7x^2-5x+1} \geq 1$ pour $x \geq 0$ et en déduire que

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 8x + 10}{x^2 + 1}$$

est positif pour $x \geq 0$.

b) Calculer l'aire A du domaine compris entre le graphe de f, son asymptote oblique et les droites $x + y + 2 = 0$, $x = 0$ et $x = 6$.

EPR.6 On considère un triangle ABC tel que $AB = 4$, $\widehat{CAB} = \alpha$ et $\widehat{ACB} = 2\alpha$. Déterminer pour quelle valeur de $\alpha > 0$ l'aire $S(\alpha)$ du triangle ABC est maximale.

EPR.7 Pour quelle valeur de m la droite δ d'équation $y = 2mx$ est-elle tangente au cercle γ de rayon 2 centré au point Ω de coordonnées $(m, 0)$?

EPR.8 On considère les segments

$$d_1 = P_1(0,1)Q(2,1) \qquad \text{et} \qquad d_2 = P_2(2,0)Q(2,1)$$

et soient γ_i les cercles de centres $\Omega_i \in d_i$, de rayon r_i, passant par P_i, $i = 1, 2$. Déterminer l'équation que doit satisfaire r_1 pour que la somme des aires des disques de frontières γ_i soit minimale lorsque les cercles sont tangents extérieurement l'un à l'autre.

EPR.9 Déterminer les nombres réels a, b et c pour que la fonction

$$f(x) = \frac{ax^3 + bx^2 - 2x + 3}{x^2 + cx + 2}$$

admette comme asymptotes les droites $x = 2$ et $y = 2x + 3$.

$\boxed{\textbf{EPR.10}}$ Quelles sont les dimensions du vase de volume maximum dont la forme est un cylindre de révolution d'aire totale égale à 1 m^2.

$\boxed{\textbf{EPR.11}}$ En utilisant l'égalité $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$, déterminer α pour que

$$L = \lim_{x\to 0^+}(1+2x)^{3/x} + \alpha \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{2x} = 0$$

$\boxed{\textbf{EPR.12}}$ Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{4}} \frac{\left(\sqrt{2}-2\sin\alpha\right)^2}{1-\sin^2 2\alpha} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\pi} \frac{\left(x^2-(\pi+1)x+\pi\right)\sin\left(\dfrac{\pi-x}{3}\right)}{x^3-(2\pi+1)x^2+(\pi^2+2\pi)x-\pi^2}$$

$\boxed{\textbf{EPR.13}}$ a) Démontrer que la racine carrée d'un nombre entier positif N est dans $\mathbb{Q}$ si et seulement si N est un carré, c'est-à-dire si $N = K^2$, $K \in \mathbb{N}$.

b) Soient $p' \neq p''$ deux nombres premiers > 1. Le nombre $\sqrt{p'} + \sqrt{p''} + \sqrt{p'p''}$ est-il rationnel ?

$\boxed{\textbf{EPR.14}}$ On considère les nombres naturels formés des chiffres

$$a_0 = 4, a_1, a_2, \ldots, a_{24}$$

$a_i \in \{0,1\}$, $1 \leq i \leq 24$. Montrer que si l'on retrouve 13 fois le chiffre 0, ces nombres ne peuvent être les carrés d'un nombre naturel.

$\boxed{\textbf{EPR.15}}$ Montrer que si $y \neq 0$, $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$ et que $\big||x|-|y|\big| \leqslant |x-y|$.

$\boxed{\textbf{EPR.16}}$ Trouver la condition nécessaire et suffisante portant sur $a \neq 1, b$ et c pour que

$$\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = 2\log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a$$

$\boxed{\textbf{EPR.17}}$ On considère les voyelles a, e, i, o, u et les consonnes m, n, p, r, s, t.

a) Combien peut-on former de mots de 5 lettres distinctes contenant 2 consonnes et 3 voyelles ?

b) Combien peut-on former de mots de 7 lettres distinctes contenant 3 consonnes et 4 voyelles, dont o et u apparaissant dans cet ordre (on souhaite avoir le son « *ou* ») ?

$\boxed{\textbf{EPR.18}}$ Peut-on trouver $x \in \mathbb{Q}$ de telle sorte que

$$\sqrt{2p\big(p - \sqrt{p} + 1\big) + x} = 3\sqrt{p} - 1$$

si p est un nombre premier > 1 ? Si x existe, déterminer alors p.

$\boxed{\textbf{EPR.19}}$ Deux points P_i $(i = 1, 2)$ décrivent des cercles Γ_i de centre Ω_i et de rayon r_i dans le même temps. Les cercles Γ_i sont donnés par : Γ_1 : $\Omega_1 = (8, 4)$, $r_1 = 2$; Γ_2 passe par l'origine et $\Omega_2 = (2, 2)$. Sachant qu'à chaque instant l'angle entre $\overrightarrow{\Omega_1 P_1}$ et $\overrightarrow{\Omega_2 P_2}$ est égal à $\frac{\pi}{4}$, déterminer l'équation cartésienne du lieu Γ des points M, milieux des segments P_1P_2.

$\boxed{\textbf{EPR.20}}$ Démontrer la formule de Heron : l'aire d'un triangle de côtés a, b, c et de périmètre $2p$ est égale à $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (sect. 5.9).

$\boxed{\textbf{EPR.21}}$ Rendre la plus simple possible l'expression

$$\alpha = \arcsin(2t - 1) + 2\arctan\sqrt{\frac{1-t}{t}}\,, \qquad 0 < t \leq 1$$

$\boxed{\textbf{EPR.22}}$ Déterminer α et β pour que la suite de terme général

$$x_n = \frac{1}{n^2+1}\left[\alpha(n^2 - n)\left(1 + \sin^2\frac{n\pi}{2}\right) + \beta(n^2 + n)\cos n\pi\right]$$

converge vers 3.

$\boxed{\textbf{EPR.23}}$ Déterminer le point I d'où l'on peut mener les tangentes communes aux cercles Γ_1 d'équation $x^2 + y^2 = 25$ et Γ_2 d'équation $x^2 + y^2 = 50 - 14\,x - 2y$.

$\boxed{\textbf{EPR.24}}$ a) Etudier la fonction $g(x) = \ln\big(1 + |\sin x|\big)$.

b) Etudier la fonction $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$ et en tracer le graphe γ ; déterminer, s'il existe, le point T de γ ayant une tangente parallèle à son asymptote δ.

$\boxed{\textbf{EPR.25}}$ a) Etudier la fonction $f(x) = x + 1 - e^x$.
Donner : domaine de définition et éventuelle parité, asymptotes, dérivée de f, tableau de variation de f et les éventuels extrema, représentation graphique de f (la dérivée seconde n'est pas demandée).

b) La courbe de la fonction $g(x) = 1 - x - e^x$ admet-elle une asymptote oblique ? Si oui, déterminer cette asymptote.

c) Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ les fonctions données par une expression du type $h(x) = \alpha(x+1) - e^x$ admettent-elles un maximum ? Donner, en fonction de α, les coordonnées du maximum de h.

d) Calculer l'aire du domaine limité par les courbes de f, de g et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 10$.

EPR.26 On considère la suite de fonctions réelles $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n e^x & \text{si } x \leq 0 \\ x^n \ln(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Soit (C_n) la courbe représentant la fonction f_n.

a) Vérifier que les fonctions f_n sont continues en $x = 0$. Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$ les fonctions f_n sont-elles dérivables en $x = 0$?

b) • Etudier les intervalles de croissance et de décroissance de f_1 $(n = 1)$.
• Calculer les coordonnées du point d'inflexion de f_1.
• Représenter la courbe (C_1). (On ne demande pas l'étude complète de la fonction.)

c) Calculer l'aire $A_n(k)$ de la région déterminée par le graphe de f_n et l'axe des abscisses dans l'intervalle $[k, 1]$ où $0 < k < 1$.
Montrer que $\displaystyle\lim_{\substack{k \to 0 \\ k>0}} A_n(k) = \frac{1}{(n+1)^2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

EPR.27 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé on donne les points

$$A(0,1,3), \quad B(4,3,1), \quad C(6,1,-3) \quad \text{et} \quad D(4,-3,1)$$

a) Déterminer l'équation cartésienne du plan ABC.

b) Trouver des équations paramétriques de la hauteur issue de C dans le tétraèdre $ABCD$ (droite normale au plan ABD et passant par C).

c) Calculer l'angle aigu que forment les plans ABC et ABD.

d) Calculer la distance des deux droites gauches AB et CD.

e) Déterminer le centre P de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$, ainsi que son rayon r. Ecrire l'équation de cette sphère.