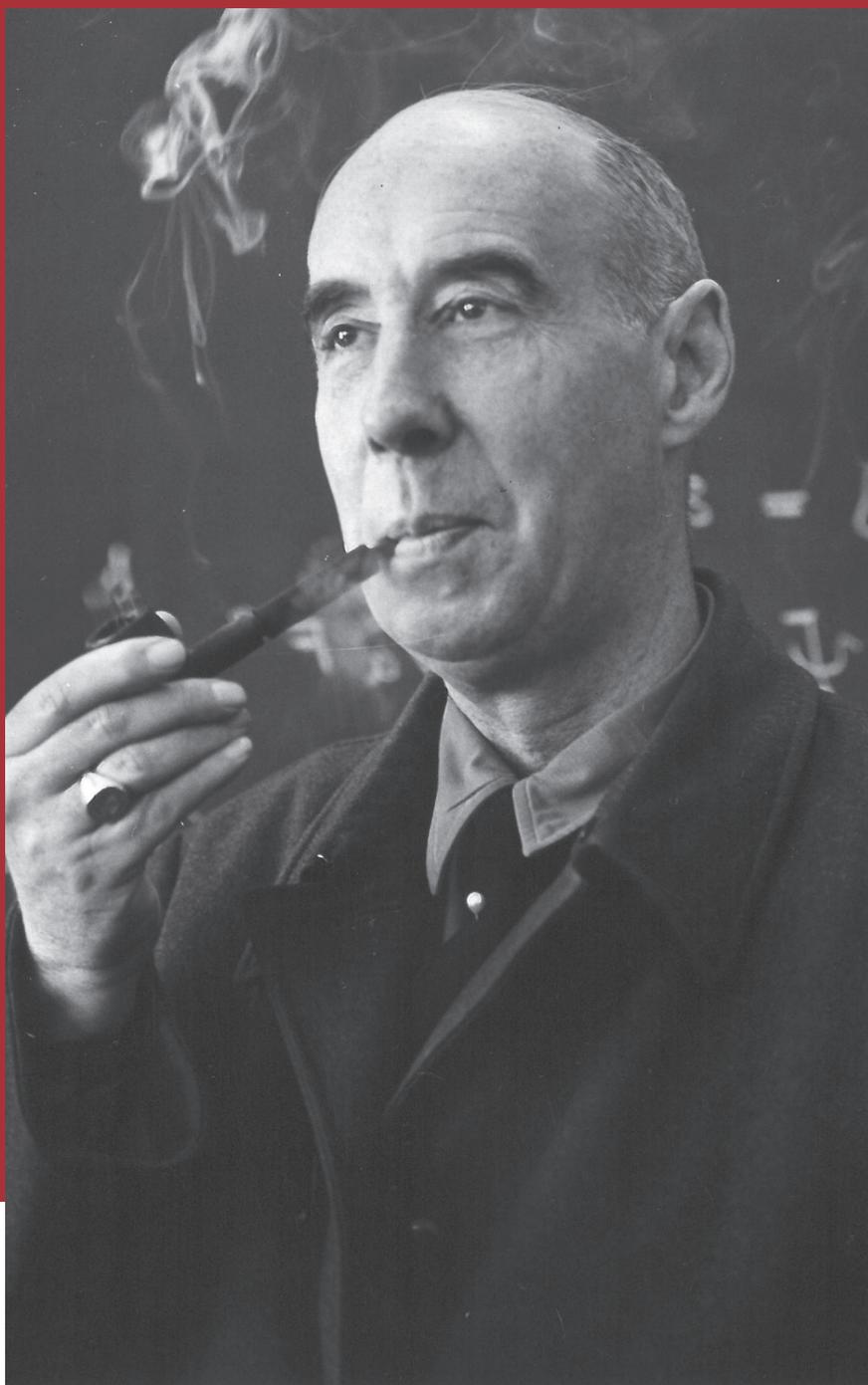


Ernst C. G. Stueckelberg

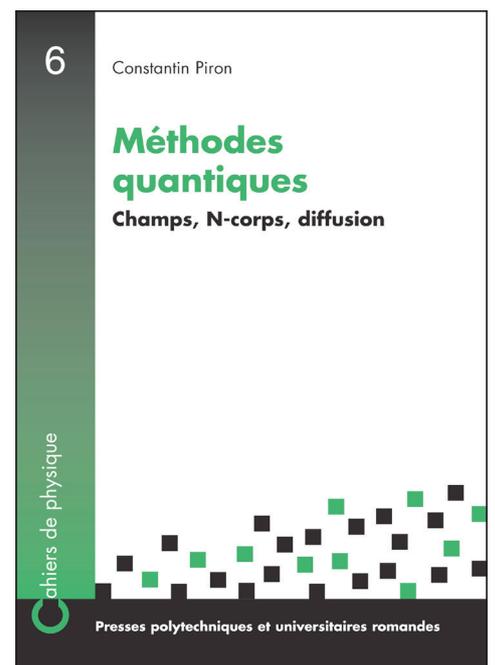
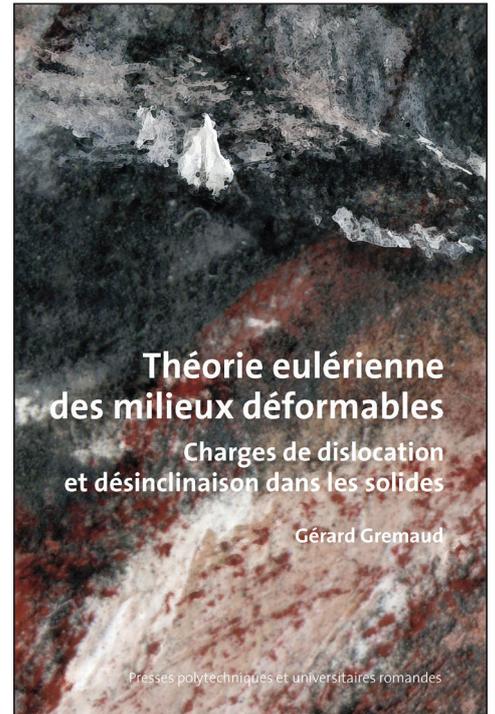
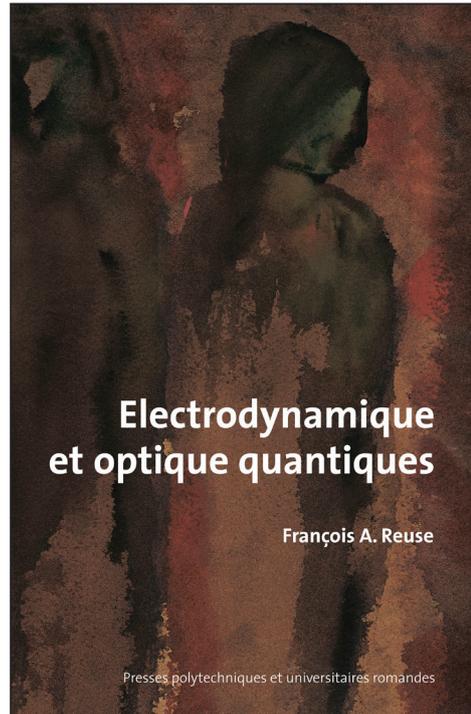
Electrodynamique



Livre II

Presses polytechniques et universitaires romandes

Chez le même éditeur



LIVRE II

Electrodynamique

Table des matières

1	Fondements de l'électrostatique	1
1.1	Définitions de la charge électrique et du champ de déplacement	1
1.2	Conditions d'équilibre	4
1.3	Force sur une charge rigide	11
1.4	Loi de Coulomb	13
1.5	Déplacement conservatif de la charge	15
1.6	Conducteurs	16
1.7	Force sur un diélectrique rigide	21
1.8	Tenseur de Maxwell	25
2	Electostatique linéaire et théorie du potentiel	29
2.1	Discontinuité de $\epsilon(\vec{x})$	29
2.1.1	Conditions aux limites pour $\vec{D}(\vec{x})$	30
2.1.2	Conditions aux limites pour	31
2.2	Démonstration de l'unicité de $\phi(\vec{x})$ lorsque $\epsilon = \text{cte}$	32
2.3	Laplacien en coordonnées curvilignes orthogonales	33
2.4	Polynomes de Legendre	37
2.5	Charge ponctuelle à l'intérieur d'un conducteur sphérique	44
2.6	Cas général – Théorème de Green II	48
2.7	Potentiel de Coulomb	50
2.8	Potentiel de double couche	52
2.9	Surface à polarisation constante	56
2.10	Corps polarisé	60
2.11	Capacité d'un condensateur	65

3	Courants stationnaires – Aimants	69
3.1	Loi de production	69
3.2	Le théorème de Stokes	72
3.3	Vecteur axial	74
3.4	Etablissement des équations du champ et de la force	75
3.5	Loi de Biot-Savart	81
3.6	Force entre deux éléments de courant	83
3.7	Couches doubles et courants	86
3.8	Travail d'induction	88
3.9	Aimants et magnétostatique	92
3.10	Forces entre aimants et courants	97
3.11	Tenseur de Maxwell	99
3.12	Coefficients d'induction	103
4	Electrodynamique	107
4.1	Equation de continuité	107
4.2	Equations de Maxwell	109
4.3	Relations entre q et \vec{j}	112
4.4	Les deux équations d'onde	114
4.5	Quantité de mouvement	116
4.6	Systèmes d'unités	120
4.7	Relativité restreinte.	124
4.8	Loi d'Ohm pour un conducteur au repos	131
4.9	Loi de Kirchhoff	134
4.10	Circuit oscillant	136
4.11	Champs retardés et avancés	138
4.12	Rayonnement du dipôle électrique	141
4.13	Rayonnement du dipôle magnétique	148
	Index	151

Fondements de l'électrostatique

Présentation

La section 1 définit le champ d'induction ; la loi d'induction sous forme locale suit et nous terminons cette section par l'énergie électrostatique. Les conditions d'équilibre sont discutées, par le moyen de la méthode des multiplicateurs de Lagrange, à la section 2 ; elles nous permettent d'introduire le champ électrique et le potentiel scalaire ; l'électrostatique linéaire est ensuite examinée avec le tenseur diélectrique. Comme exemple, on donne la boule chargée. La force sur une charge rigide et la loi de Coulomb sont examinées aux sections 3 et 4. Le déplacement conservatif de la charge fait l'objet de la section 5 et les conducteurs ainsi que leur loi de force sont étudiés à la section 6. La force sur un diélectrique est alors traitée à la section 7 et le tenseur de Maxwell qui permet d'exprimer la force électrostatique totale à l'aide d'une intégrale de surface est finalement introduit à la section 8.

1.1 Définitions de la charge électrique et du champ de déplacement

Diverses expériences permettent d'observer quantitativement la présence de charges électriques avant toute explication théorique. Ces charges sont des grandeurs essentiellement liées à la matière et constituent une nouvelle propriété de celle-ci. Il apparaît que le nombre qui mesure une charge est soit positif, soit négatif suivant la nature de celle-ci.

Nous désignons par Q_V la somme algébrique de toutes les charges contenues dans un volume V ; cette grandeur manifestement extensive peut, dans le cas d'une distribution continue de charge, s'exprimer par l'intermédiaire d'une densité scalaire :

$$Q_V = \int_V (dVq)(\vec{x}), \quad (1.1.1)$$

où

$$q(\vec{x}) = \frac{dQ(\vec{x})}{dV(\vec{x})}$$

est la *densité de charge électrique*, $dQ(\vec{x})$ étant le nombre de charges (positives et négatives) contenues dans $dV(\vec{x})$.

Si la distribution de charges est discrète, nous avons

$$Q_V = \sum_i q_i.$$

Loi d'induction

Nous appelons *champ de déplacement* (ou *induction électrique*) et nous notons $\vec{D}(\vec{x}) : \{D^i(x^1, x^2, x^3)\}$ le champ vectoriel contravariant défini par la loi

$$C_e Q_V = \oint_V (d\vec{\sigma}, \vec{D})(\vec{y}) \quad (1.1.2)$$

où $d\vec{\sigma}(\vec{y})$ est l'élément de surface extérieure et où C_e est une constante dépendant du système d'unités choisi.

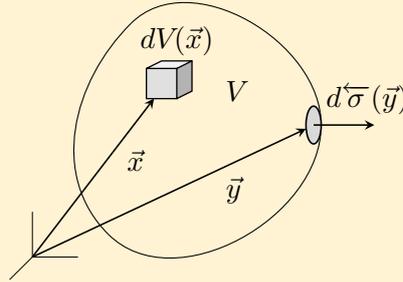


Fig. 1.1.1 Eléments de volume et de surface extérieure.

Cette loi exprime que le flux du champ $\vec{D}(\vec{x})$ à travers la surface fermée entourant le volume V est égal à la charge totale Q_V contenue dans celui-ci. Dans le cas d'une distribution continue de charge, cette loi peut s'exprimer sous forme locale. Pour cela, rappelons quelques notions d'*analyse vectorielle* : si $\vec{a}(\vec{x})$ est un champ vectoriel, on peut lui associer le champ scalaire $\text{div}\vec{a}(\vec{x})$ défini par

$$\text{div}\vec{a}(x_0) = \lim_{\Delta V_0 \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V_0} \oint_{\Delta V_0} (d\vec{\sigma}, \vec{a})(\vec{y}_0)$$

et alors, en divisant le volume V en éléments ΔV_0 :

$$\begin{aligned} \int_V (dV \text{div}\vec{a})(\vec{x}) &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \sum_{\alpha} (\Delta V_0 \text{div}\vec{a})(\vec{x}) \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \sum_{\alpha} \oint_{\Delta V_0} (d\vec{\sigma}, \vec{a})(\vec{y}_0) = \oint_V (d\vec{\sigma}, \vec{a})(\vec{y}), \end{aligned}$$

ce qui conduit au *théorème de Gauss* :

$$\int_V (dV \operatorname{div} \vec{a})(\vec{x}) = \oint_V (d\vec{\sigma}, \vec{a})(\vec{y}).$$

En appliquant ce théorème à notre loi de production, nous obtenons

$$C_e Q_V = \oint_V (d\vec{\sigma}, \vec{D})(\vec{y}) = \int_V (dV \operatorname{div} \vec{D})(\vec{x}).$$

Pour une distribution continue :

$$Q_V = \int_V (dV q)(\vec{x})$$

et alors

$$\int_V (dV (C_e q - \operatorname{div} \vec{D}))(\vec{x}) = 0.$$

Comme nous n'avons fait aucune hypothèse sur le volume V , celui-ci peut être arbitraire ; nous avons donc en chaque point :

$$\operatorname{div} \vec{D}(\vec{x}) = C_e q(\vec{x}), \quad (1.1.3)$$

ce qui constitue la *loi d'induction sous forme locale*.

Cette loi montre que les charges sont les sources du champ de déplacement $\vec{D}(\vec{x})$.

Un système est dit électrostatique et est noté $\Sigma^{(el.)}$ lorsque ses propriétés peuvent être décrites par le champ $\vec{D}(\vec{x})$.

Il apparaît donc une nouveauté. Jusqu'ici nous n'avons considéré que des systèmes formés d'une collection d'objets physiques, alors que $\Sigma^{(el.)}$ est formé d'une *champ*. Désormais cette grandeur doit être considérée comme une réalité physique (au même titre que la masse par exemple) et non plus seulement comme un artifice mathématique.

Il faut bien remarquer que les sources du camp (les charges) n'appartiennent pas au système électrostatique $\Sigma^{(el.)}$, puisqu'elles constituent une propriété de la matière qui elle en est absente.

Comme nous le verrons tout au long de ce chapitre, définir un tel système n'est pas stérile, bien au contraire.

L'énergie de ce système doit être une fonctionnelle de $\vec{D}(\vec{x})$:

$$U^{(el.)} = U^{(el.)}[\vec{x}, \vec{D}(\vec{x})].$$

L'énergie étant une grandeur extensive, elle peut s'écrire sous la forme

$$U^{(el.)}[\vec{D}(\cdot)] = \int_V dV(\vec{x}) u^{(el.)}[\vec{x}, \vec{D}(\vec{x})], \quad (1.1.4)$$

où $u^{(el.)}[\vec{x}, \vec{D}(\vec{x})]$ est la *densité d'énergie électrostatique*.

1.2 Conditions d'équilibre

Un système est en équilibre lorsque les grandeurs qui le caractérise sont indépendantes du temps. En particulier, d'après le premier principe de la thermodynamique, son énergie doit être constante (système fermé) et minimum, c'est-à-dire

$$\underline{\delta}^{(1)}U = 0 \quad \text{et} \quad \underline{\delta}^{(2)}U \geq 0.$$

L'énergie de notre système électrostatique étant une fonctionnelle de $\vec{D}(\vec{x})$, nous allons imposer une variation $\delta\vec{D}(\vec{x})$ autour de la valeur de ce champ à l'équilibre et exprimer que son effet sur l'énergie est nul (en vertu du premier principe).

Cette variation $\delta\vec{D}(\vec{x})$ n'est toutefois pas arbitraire, car il faut toujours que le champ vérifie la loi d'induction :

$$(\text{div}\vec{D} - C_e q)(\vec{x}) = 0.$$

Nous sommes donc ramenés à rechercher les conditions rendant la fonctionnelle $U^{(el.)}[\vec{D}(\cdot)]$ minimum, la fonction $\vec{D}(\vec{x})$ étant soumise à la contrainte

$$(\text{div}\vec{D} - C_e q)(\vec{x}) = 0.$$

Or, nous le savons, un tel problème se résout facilement par la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

Mais alors, il faut bien remarquer qu'en fait il existe une infinité de contraintes : une en chaque point \vec{x} du système, et comme à chaque contrainte doit être associé un multiplicateur, nous aurons un champ scalaire $\phi(\vec{x})$ de multiplicateurs.

Définition du champ électrique

On appelle *champ électrique* $\overleftarrow{E}(\vec{x}) : \{E_i(x^1, x^2, x^3)\}$ le champ vectoriel covariant défini par

$$\frac{1}{C_e} E_i(\vec{x}) = \frac{\partial u^{(el.)}[\vec{x}, \vec{D}(\vec{x})]}{\partial D^i(\vec{x})} \quad (1.2.1)$$

(ce qui constitue une *relation phénoménologique*).

Par suite :

$$\delta u^{(el.)}[\vec{x}, \vec{D}(\vec{x})] = \frac{\partial u^{(el.)}}{\partial D^i} \delta D^i = \frac{1}{C_e} E_i \delta D^i,$$

c'est-à-dire :

$$\delta u^{(el.)}[\vec{x}, \vec{D}(\vec{x})] = \frac{1}{C_e} (\overleftarrow{E}, \delta\vec{D}).$$

La méthode des multiplicateurs de Lagrange consiste d'abord à former la fonctionnelle :

$$\Psi[\vec{D}(\cdot)] = U^{(el.)}[\vec{D}(\cdot)] - \int_V dV(\vec{x}) \phi(\vec{x}) \left(\frac{1}{C_e} \text{div}\vec{D} - q \right) (\vec{x}),$$

puis à chercher les conditions de minimum de cette fonctionnelle.

a) *condition d'extremum* : $\underline{\delta}^{(1)}\Psi[\dots] = 0$:

$$\begin{aligned}\underline{\delta}^{(1)}\Psi[\dots] &= \underline{\delta} \int_V dV \left[u^{(el.)}[\vec{x}, \vec{D}(\vec{x})] - \phi(\vec{x}) \left(\frac{1}{C_e} \operatorname{div} \vec{D} - q \right) \right] (\vec{x}) \\ &= \int_V dV(\vec{x}) \left[\delta u^{(el.)}[\vec{x}, \vec{D}(\vec{x})] - \phi(\vec{x}) \left(\frac{1}{C_e} \operatorname{div} \delta \vec{D} - 0 \right) \right] (\vec{x}) \\ &= \int_V dV(\vec{x}) \left[(\overleftarrow{E}, \delta \vec{D}) - \phi \operatorname{div} \delta \vec{D} \right] (\vec{x}) \equiv 0.\end{aligned}$$

Pour continuer, il faut faire appel à *l'analyse vectorielle*.

A un champ scalaire $\varphi(\vec{x})$ nous pouvons associer le champ vectoriel $\overleftarrow{\operatorname{grad}} \varphi(\vec{x})$ défini par

$$\overleftarrow{\operatorname{grad}} \varphi(\vec{x}) = \lim_{\Delta V_0 \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V_0} \oint_{\Delta V_0} (d^{\leftarrow} \sigma \varphi)(\vec{y}_0).$$

Cherchons à transformer

$$\operatorname{div}(\varphi \vec{a})(\vec{x}_1) = \lim_{\Delta V_1 \rightarrow 0} \oint_{\Delta V_1} (d^{\leftarrow} \sigma, \varphi \vec{a})(\vec{y}_1).$$

Ecrivons : $\vec{a}(\vec{x}_1) = \vec{a}_{(1)}$ et $\varphi(\vec{x}_1) = \varphi_{(1)}$. Si \vec{y} est voisin de \vec{x} , nous avons la formule des accroissements finis

$$\begin{aligned}(\varphi \vec{a})(\vec{y}) &= \underbrace{\vec{a}_{(1)} \varphi_{(1)}}_{\text{cte}} + (\vec{a}(\vec{y}) - \vec{a}_{(1)}) \underbrace{\varphi_{(1)}}_{\text{cte}} + \underbrace{\vec{a}_{(1)}}_{\text{cte}} (\varphi(\vec{y}) - \varphi_{(1)}) \\ &\quad + \underbrace{(\vec{a}(\vec{y}) - \vec{a}_{(1)}) (\varphi(\vec{y}) - \varphi_{(1)})}_{2^{\text{e}} \text{ ordre}},\end{aligned}$$

ce qui conduit à

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\varphi \vec{a})(\vec{x}_1) &= 0 + \varphi_{(1)} \lim_{\Delta V_1 \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V_1} \oint_{\Delta V_1} (d^{\leftarrow} \sigma, \vec{a})(\vec{y}_1) \\ &\quad + \left(\vec{a}_{(1)}, \lim_{\Delta V_1 \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V_1} \oint_{\Delta V_1} d^{\leftarrow} \sigma \varphi \right) (\vec{y}_1).\end{aligned}$$

On a donc

$$\operatorname{div}(\varphi \vec{a})(\vec{x}) = (\varphi \operatorname{div} \vec{a} + (\vec{a}, \overleftarrow{\operatorname{grad}} \varphi))(\vec{x})$$

et, sous forme intégrale,

$$\int_V (dV \operatorname{div} \varphi \vec{a})(\vec{x}) = \oint_V (d^{\leftarrow} \sigma, \varphi \vec{a})(\vec{y}) = \int_V (dV \varphi \operatorname{div} \vec{a})(\vec{x}) + \int_V (dV (\vec{a}, \overleftarrow{\operatorname{grad}} \varphi))(\vec{x}),$$

d'où le *théorème de Green* :

$$\int_V (dV \varphi \operatorname{div} \vec{a})(\vec{x}) = \oint_V (d^{\leftarrow} \sigma, \varphi \vec{a})(\vec{y}) - \int_V (dV (\overleftarrow{\operatorname{grad}} \varphi, \vec{a}))(\vec{x}).$$

Utilisons ce théorème dans l'expression trouvée pour $\underline{\delta}^{(1)}\Psi[\dots] \equiv 0$; il vient

$$\underline{\delta}\Psi[\dots] = \frac{1}{C_e} \int_V \left(dV(\overleftarrow{E} + \overleftarrow{\text{grad}}\phi, \delta\vec{D}) \right)(\vec{x}) - \frac{1}{C_e} \oint_V (d\overleftarrow{\sigma}, \phi \delta\vec{D})(\vec{y}) \equiv 0.$$

Nous choisissons $\delta\vec{D} = \vec{0}$ sur la surface limitant V (quitte à prendre s'il le faut $V = V_\infty$). Par suite :

$$\oint_{V_\infty} (d\overleftarrow{\sigma}, \phi \delta\vec{D})(\vec{y}) = 0,$$

et il reste

$$\underline{\delta}^{(1)}\Psi[\dots] = \frac{1}{C_e} \int_{V_\infty} \left(dV(\overleftarrow{E} + \overleftarrow{\text{grad}}\phi, \delta\vec{D}) \right)(\vec{x}) \equiv 0.$$

Or dans la méthode des multiplicateurs de Lagrange, $\delta\vec{D}(\vec{x})$ est tout à fait arbitraire dans V ; il s'ensuit que la condition d'extremum de $\Psi[\dots]$, équivalente à celle de $U^{(el.)}$, est donnée par :

$$\overleftarrow{E}(\vec{x}) = -\overleftarrow{\text{grad}}\phi(\vec{x}), \quad (1.2.2)$$

où $\phi(\vec{x})$ est le *potentiel scalaire*.

Nous voyons que dans un système électrostatique, le champ électrique $\overleftarrow{E}(\vec{x})$ dérive d'un potentiel scalaire $\phi(\vec{x})$.

b) Condition de minimum :

$\underline{\delta}^{(2)}\Psi[\dots] \geq 0$: $\Psi[\dots]$ étant une fonctionnelle extensive, nous pouvons écrire

$$\Psi[\dots] = \int_V (dV\psi)(\vec{x})$$

et

$$\underline{\delta}^{(1)}\Psi[\dots] = \int_V (dV\psi_i \delta D^i)(\vec{x})$$

avec

$$\psi_i = \frac{\partial\psi}{\partial D^i} = \frac{1}{C_e} (E_i + \overleftarrow{\text{grad}}_i\phi) = \frac{\partial u^{(el.)}}{\partial D^i} + \frac{1}{C_e} \overleftarrow{\text{grad}}_i\phi.$$

La deuxième variation est, puisque $\Psi[\dots]$ est une fonctionnelle extensive,

$$\underline{\delta}^{(2)}\Psi[\dots] = \int_V (dV\psi_{ik} \delta D^i \delta D^k)(\vec{x}) \geq 0$$

avec

$$\psi_{ik} = (\psi_i)_k = \frac{\partial^2 u^{(el.)}}{\partial D^i \partial D^k}.$$

Les variations δD^i et δD^k étant arbitraires, les conditions de minimum de $\Psi[\dots]$, équivalente à celle de $U^{(el.)}[\dots]$, sont données par :

$$\left\{ \frac{\partial^2 u^{(el.)}[\vec{x}, \vec{D}(\vec{x})]}{\partial D^i(\vec{x}) \partial D^k(\vec{x})} \right\} \geq 0. \quad (1.2.3)$$

Electrostatique linéaire

L'électrostatique est dite linéaire, lorsque la densité d'énergie électrostatique est une forme quadratique en D^i :

$$u^{(el.)}[\vec{x}, \vec{D}(\vec{x})] = \frac{1}{2C_e} \eta_{ik} D^i(\vec{x}) D^k(\vec{x}). \quad (1.2.4)$$

Dans ce cas particulier,

$$E_i = (\eta_{ik} D^k)(\vec{x}).$$

La condition de minimum de $U^{(el.)}$ s'écrit alors :

$$\left\{ \frac{1}{C_e} \eta_{ik}(\vec{x}) \right\} \geq 0.$$

Soit : $C_e > 0$; alors $\{\eta_{ik}(\vec{x})\} \geq 0$. De plus, puisqu'on a une forme quadratique, le tenseur η_{ik} est symétrique : $\eta_{ik} = \eta_{ki} = \eta_{(ik)}$.

Si $\det \eta \neq 0$, il existe un inverse $(\eta^{-1})^{ik}$ tel que $(\eta^{-1})^{ik} \eta_{k\ell} = \delta_k^i$. Nous écrivons généralement : $(\eta^{-1})^{ik} = \epsilon^{ik}$ et $\epsilon^{ik}(\vec{x})$ est appelé le *tenseur diélectrique*.

Dans le système $\Sigma^{(el.)}$, $\epsilon^{ik}(\vec{x})$ doit être considéré comme une propriété de l'*espace*. (ce n'est que dans un système matériel que $\epsilon^{ik}(\vec{x})$ caractérise une propriété de la matière, celle d'être « diélectrique » cf. sect. 1.7).

Nous pouvons alors écrire

$$D^k(\vec{x}) = \epsilon^{ki}(\vec{x}) E_i(\vec{x})$$

et vérifier que $\{\epsilon^{ik}(\vec{x})\} \geq 0$.

a) si l'*espace est homogène*, c'est-à-dire si

$$\eta_{ik}(\vec{x}) = \eta_{ik}(\vec{x} + \Delta\vec{x}) = \eta_{ik} \text{ et } \epsilon^{ik}(\vec{x}) = \epsilon^{ik}(\vec{x} + \Delta\vec{x}) = \epsilon^{ik},$$

alors η_{ik} et ϵ^{ik} sont des constantes.

b) si l'*espace est isotrope*, c'est-à-dire si

$$\eta_{ik}(\vec{x}) = g_{ik} \eta(\vec{x}) \text{ et } \epsilon^{ik}(\vec{x}) = g^{ik} \epsilon(\vec{x}),$$

alors : $\eta_{ik} \epsilon^{\ell k} = \delta_i^\ell = g_{ik} g^{\ell k} \eta \epsilon = \delta_i^\ell \eta \epsilon$ d'où $\eta = \epsilon^{-1}$.

Nous avons : $D^k(\vec{x}) = g^{ki} \epsilon E_i(\vec{x})$. Si nous choisissons un espace euclidien cartésien : $g_{ik} = \delta_{ik}$, alors :

$$\vec{D}(\vec{x}) = \epsilon(\vec{x}) \vec{E}(\vec{x}).$$

Nous constatons que c'est uniquement dans le cas isotrope et homogène que nous avons la relation bien connue : $\vec{D}(\vec{x}) = \epsilon \vec{E}(\vec{x})$ où ϵ est alors appelé « constante diélectrique ».

Pour simplifier certains problèmes, des auteurs considèrent $\eta_{ik}(\vec{x})$ comme la *métri-*
trique d'espace du système $\Sigma^{(el.)}$.

Exprimons maintenant l'énergie électrostatique $U^{(el.)}[\dots]$ du système. La forme quadratique

$$u^{(el.)}[\vec{x}, \vec{D}(\vec{x})] = \frac{1}{2C_e} \eta_{ik}(\vec{x}) D^i(\vec{x}) D^k(\vec{x})$$

peut s'écrire, puisque $E_i = \eta_{ik} D^k$,

$$u^{(el.)}[\vec{x}, \vec{D}(\vec{x})] = \frac{1}{2C_e} (\overleftarrow{E}, \vec{D})(\vec{x}),$$

et alors

$$U^{(el.)}[\dots] = \frac{1}{2C_e} \int_V (dV (\overleftarrow{E}, \vec{D}))(\vec{x}).$$

En vertu du théorème de Green, puisque $\overleftarrow{E} = -\overleftarrow{\text{grad}} \phi$, l'on a

$$\begin{aligned} U^{(el.)} &= -\frac{1}{2C_e} \int_V (dV (\overleftarrow{\text{grad}} \phi, \vec{D}))(\vec{x}) \\ &= \frac{1}{2C_e} \left\{ \int_V (dV \phi \text{div} \vec{D})(\vec{x}) + \oint_V (d\overleftarrow{\sigma}, \phi \vec{D})(\vec{y}) \right\}. \end{aligned}$$

Par normalisation, nous posons $\phi(\infty) = 0$ ce qui ne change en rien les propriétés électriques du système car, de par sa définition, $\overleftarrow{E} = -\overleftarrow{\text{grad}} \phi$, le potentiel n'est défini qu'à une constante près, que l'on peut se donner arbitrairement.

Il s'ensuit que pour $V = V_\infty$, le second terme est nul et il reste

$$U^{(el.)} = \frac{1}{2C_e} \int_{V_\infty} (dV \phi \text{div} \vec{D})(\vec{x}).$$

Comme $\text{div} \vec{D}(\vec{x}) = C_e q(\vec{x})$, l'expression de l'énergie électrostatique est donnée par

$$U^{(el.)} = \frac{1}{2} \int_{V_\infty} (dV \phi q)(\vec{x}). \quad (1.2.5)$$

Au vu de ce résultat, on serait tenté de croire que la densité d'énergie électrostatique du système peut s'écrire

$$u^{(el.)} = \frac{1}{2} (\phi q)(\vec{x})$$

bien qu'elle soit différente de

$$u^{(el.)} = \frac{1}{2C_e} (\overleftarrow{E}, \vec{D})(\vec{x}).$$

En fait seule cette dernière doit être considérée comme valable car la première s'exprime à l'aide de grandeurs étrangère au système (telles que $q(\vec{x})$ par exemple).

EXEMPLE : BOULE CHARGÉE DE RAYON R

Calculer les champs $\vec{D}(\vec{x})$ et $\vec{E}(\vec{x})$, ainsi que l'énergie électrostatique créés par une boule de charge Q répartie de façon homogène et isotrope placée dans le vide.

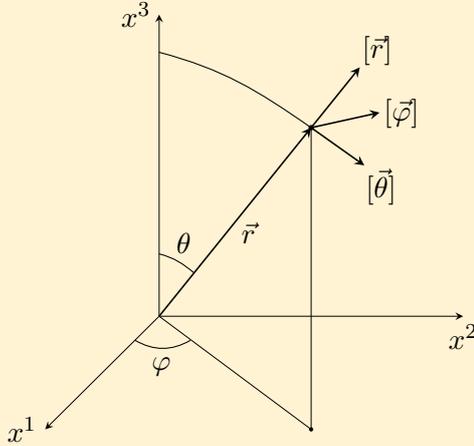


Fig. 1.2.1 Coordonnées sphériques

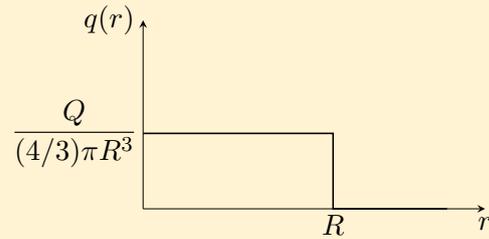


Fig. 1.2.2

Prenons les coordonnées sphériques $\{r, \theta, \varphi\}$, alors

$$\vec{D} = [\vec{r}]D_r + [\vec{\theta}]D_\theta + [\vec{\varphi}]D_\varphi.$$

Grâce à l'homogénéité de la distribution de charges, il n'y a pas de position privilégiée parmi les rotations : il y a symétrie sphérique et \vec{D} est radial et alors

$$\vec{D} = [\vec{r}]D_r(r).$$

La distribution de charge est

$$q(r) = \begin{cases} \frac{Q}{(4/3)\pi R^3} & \text{pour } r \leq R \\ 0 & \text{pour } r > R. \end{cases}$$

La loi d'induction

$$\oint_V (d\vec{\sigma}, \vec{D}) = C_e \int_V dV q$$

donne, lorsque V est une sphère de rayon r ,

$$4\pi r^3 D_r[\vec{r}] = C_e \int_0^r 4\pi r^2 dr q(r).$$

Cela conduit à

$$D_r(r) = \frac{C_e}{4\pi r^2} \int_0^r 4\pi r^2 dr q(r)$$

et nous obtenons

$$D_r(r) = \begin{cases} \frac{C_e Q}{4\pi} \frac{r}{R^3} & \text{pour } r \leq R \\ \frac{C_e Q}{4\pi} \frac{1}{r^2} & \text{pour } r > R. \end{cases}$$