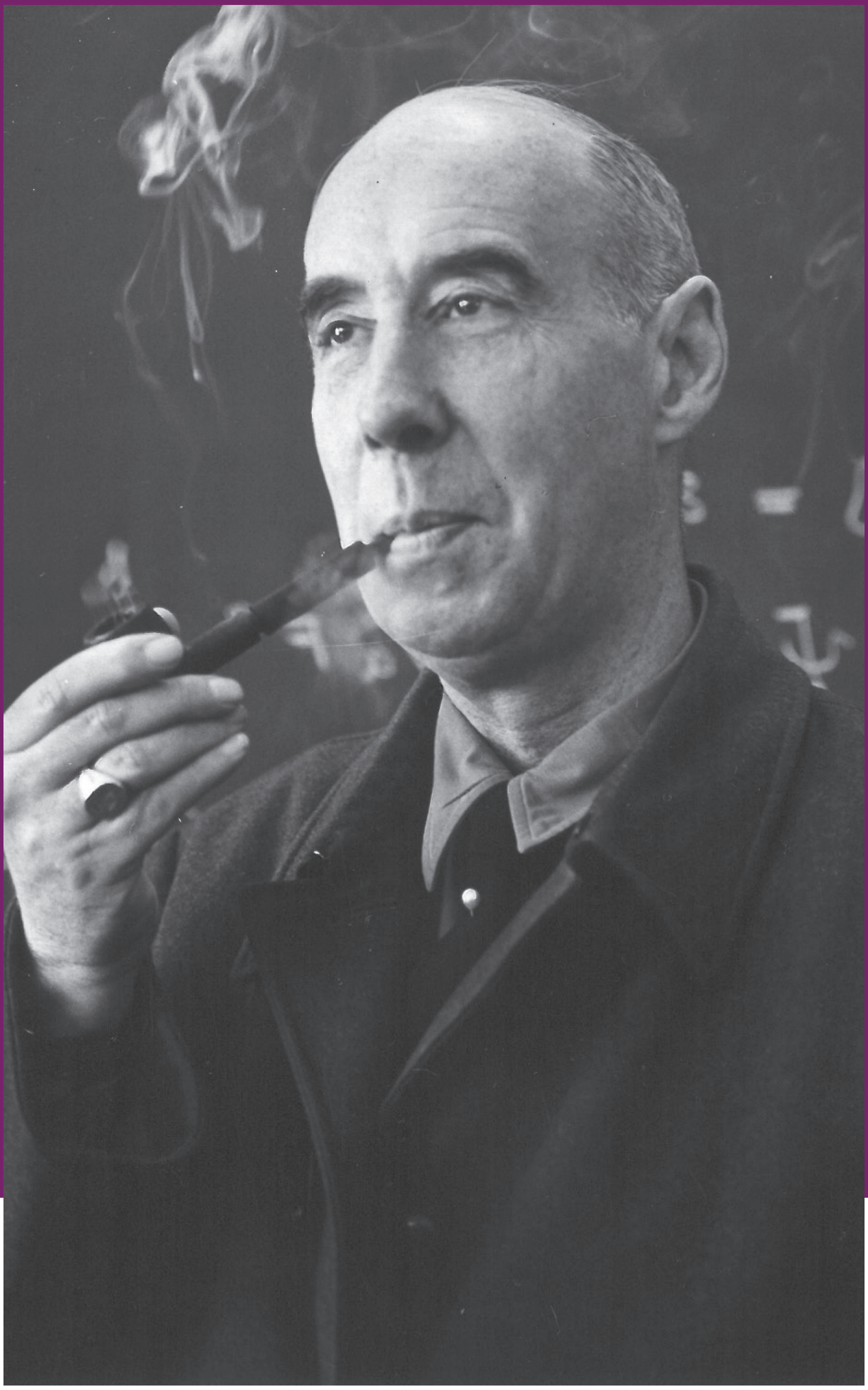
Ernst C. G. Stueckelberg

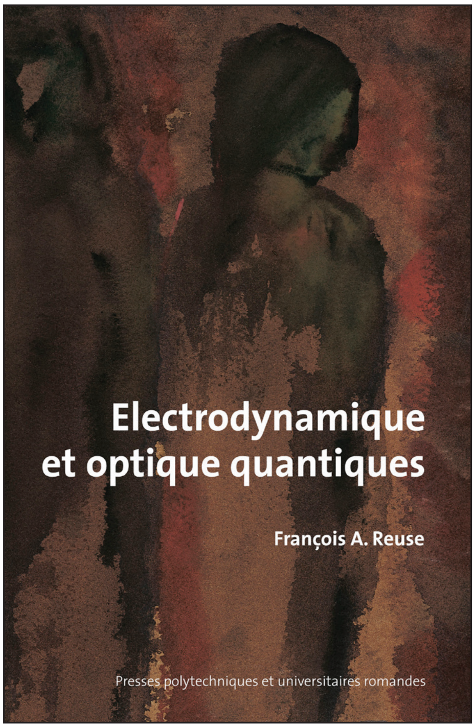
Relativité restreinte

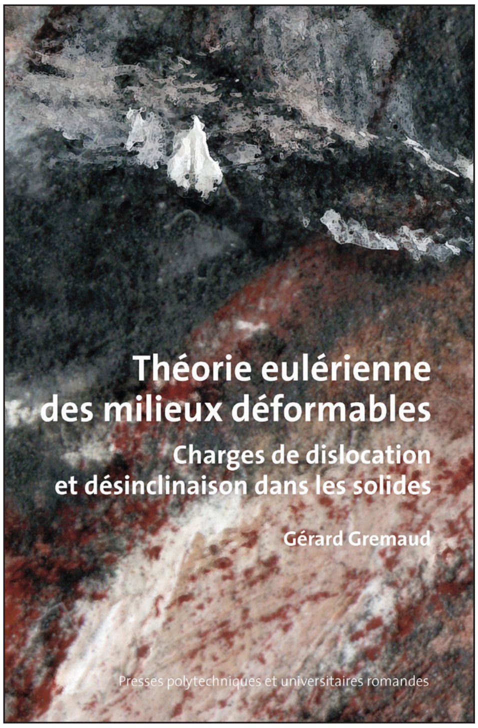


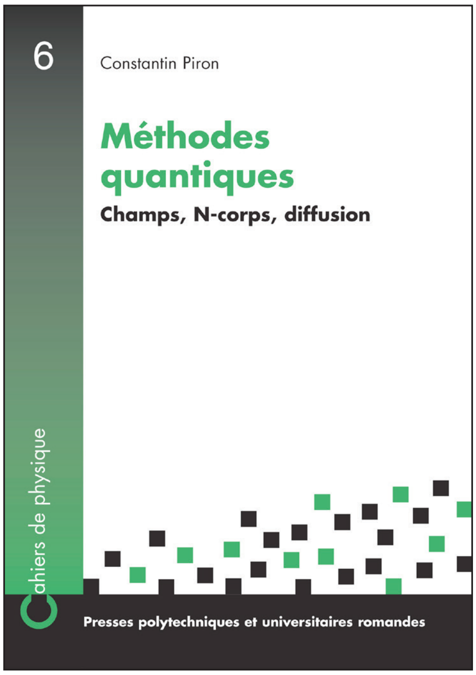
Livre III

Presses polytechniques et universitaires romandes www.ppur.org

Chez le même éditeur







Presses polytechniques et universitaires romandes

Livre III

Relativité restreinte

Table des matières

Chapitre 1

Electromagnétisme et groupe affine

Présentation

Après avoir rappelé l'équation de continuité à la section 1, nous montrons à la section 2 la covariance des équations de Maxwell par rapport au groupe affine. Les tenseurs de Maxwell et la force de Lorentz sont ensuite définis à la section 3.

1.1 Equation de continuité

Considérons le volume V limité par la surface fermée $C(\vec{y}) = 0$ *fixe* dans le temps. Définissons la fonctionnelle $F(t)$ de densité $f(\vec{x}, t)$

$$F(t) = \int_V dV(\vec{x}) f(\vec{x}, t).$$

Nous avons établi dans le cours de thermodynamique (livre I, section 2.1) l'équation de continuité pour $f(\vec{x}, t)$:

$$(\partial_t f + \partial_k j_F^k)(\vec{x}, t) = \rho_F(\vec{x}, t). \tag{1.1.1}$$

La surface étant fixe, il n'apparaît pas de termes de convection. Cette équation n'impliquant donc pas l'existence d'un champ de vitesse, pourra être utilisée en électromagnétisme.

1.2 Covariance par rapport au groupe affine des équations de Maxwell

Dans le système de Heaviside, les deux groupes d'équations de Maxwell s'écrivent (cf. livre II) :
a) *groupe inhomogène*

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overleftrightarrow{H} &= \frac{1}{c}(\partial_t \vec{D} + \vec{j}) \\ \mathrm{div}\,\vec{D} &= q, \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

b) *groupe homogène*

$$\begin{aligned} \overset{\hookrightarrow}{\mathrm{rot}}\,\overleftarrow{E} &= -\frac{1}{c}\partial_t \overleftrightarrow{B} \\ \mathrm{div}\,\overleftrightarrow{B} &= 0. \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

Nous allons montrer qu'en utilisant un formalisme *quadri-dimensionnel*, il est possible de les écrire sous forme *tensorielle* ; ce qui revient à montrer qu'elles sont covariantes par rapport au groupe affine (en abrégé : cov/$\{A\}$).

Nous posons à cet effet

$$x^4 = ct, \text{ donc } \frac{1}{c}\partial_t = \partial_4 = \frac{\partial}{\partial x^4},$$

où $c = 1$ et $[\mathrm{v}] = 1$.

Occupons-nous d'abord du groupe inhomogène ; nous avons

$$(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overleftrightarrow{H})^i = \partial_k \mathring{H}_\ell - \partial_\ell \mathring{H}_k = \partial_4 D^i + j^i.$$

Or $\mathring{H}_\ell = H^{ik}$, où les indices i, k, ℓ prennent une des trois permutations cycliques de la suite $\{1, 2, 3\}$, donc

$$\text{s.s.}(\partial_k H^{ik} - \partial_\ell H^{\ell i} - \partial_4 D^i) = \partial_k H^{ik} - \partial_4 D^i = j^i$$

(s.s. est une abréviation de sans sommation).

On pose par *définition* :

$$D^i \overset{\text{def}}{=} H^{4i} \overset{\text{def}}{=} -H^{i4} \tag{1.2.3}$$

et donc

$$\partial_k H^{ik} - \partial_4 D^i = \partial_\alpha H^{i\alpha} = j^i.$$

D'autre part on a

$$\mathrm{div}\,\vec{D} = \partial_i D^i = \partial_i H^{4i} = q.$$

On pose maintenant par *définition* :

$$q \overset{\text{def}}{=} j^4 \tag{1.2.4}$$

et alors

$$\operatorname{div}\vec{D} = \partial_i H^{4i} = j^4.$$

Les quatre équations du groupe inhomogène peuvent donc s'écrire sous la *forme tensorielle* :

$$\partial_\alpha H^{\alpha\beta} = -j^\beta. \tag{1.2.5}$$

Nous en déduisons immédiatement l'*équation tensorielle de continuité de la charge* :

$$\partial_{(\alpha\beta)} H^{[\alpha\beta]} = 0 = -\partial_\beta j^\beta$$

et donc

$$\partial_\beta j^\beta = 0. \tag{1.2.6}$$

Pour le groupe homogène nous avons d'abord :

$$(\overleftrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overleftarrow{E})_{ik} = \partial_i E_k - \partial_k E_i = -\partial_4 B^{ik}.$$

On pose encore par *définition* :

$$E_k \overset{\text{def}}{=} B_{k4} \overset{\text{def}}{=} -B_{4k} \tag{1.2.7}$$

et alors :

$$\partial_i B_{k4} + \partial_k B_{4i} + \partial_4 B_{ik} = \overrightarrow{ik4}\,\partial_i B_{k4} = 0.$$

D'autre part

$$\operatorname{div}\overleftrightarrow{B} = \partial_i B^i = \partial_i B_{k\ell} + \partial_k B_{\ell i} + \partial_\ell B_{ik} = \overrightarrow{ik\ell}\,\partial_i B_{k\ell} = 0.$$

Les quatre équations du groupe homogène s'écrivent donc sous la *forme tensorielle* :

$$\overrightarrow{\alpha\beta\gamma}\,\partial_\alpha B_{\beta\gamma} = 0. \tag{1.2.8}$$

Remarque.

On peut écrire

$$\overrightarrow{\alpha\beta\gamma}\,\partial_\alpha B_{\beta\gamma}\ (= 3\partial_{[\alpha} B_{\beta\gamma]}) = j_{[\alpha\beta\gamma]},$$

où $j_{[\alpha\beta\gamma]}$ est la densité de pôles magnétiques isolés.

Si $j_{[\alpha\beta\gamma]} \neq 0$, il n'est plus possible de définir un *potentiel* :

$$B_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha \quad \text{où} \quad A_4 = \phi.$$

Jusqu'ici jamais de tels pôles n'ont éte mis en évidence.

Par (1.2.5) et (1.2.8), nous avons donc bien montré que les équations de Maxwell sont cov/$\{A\}$. Insistons sur le fait que les définitions (1.2.3), (1.2.4) et (1.2.7) sont les *seules* qui permettent une transcription tensorielle.

Le fait que les équations de Maxwell soient cov/$\{A\}$ dans le 4-espace défini plus haut n'apporte aucun contenu physique nouveau. Ce ne sera que par l'introduction des postulats de covariance et de constance de la vitesse de la lumière dans le vide que nous pourrons physiquement interpréter ce fait.