

# GUIDE BLANC

pourquoi  
une mathématique  
moderne ?

Gilbert WALUSINSKI



NC

# GUIDE BLANC

Dirigé par Georges DECOTE, agrégé de l'université

# pourquoi une mathématique moderne ?

Gilbert WALUSINSKI

professeur aux lycées de Saint-Cloud

8°V  
74359

DL-5 3 1971-04076

**armand colin**

103, boulevard Saint-Michel  
PARIS V°

GUIDE BLANC

Dirigé par Georges DECOLE, député de l'Indre

# pourquoi une mathématique moderne ?

Gilbert WALUSINSKI

professeur aux lycées de Saint-Claude



# SOMMAIRE

Note pour le bon usage de ce guide . . . . .	5
<b>Chapitre I : Pourquoi une réforme de l'enseignement mathématique?</b> . . . . .	7
Section 1 : de la mathématique partout . . . . .	9
Section 2 : de la mathématique moderne : esquisse à grands traits . . . . .	13
Section 3 : de la mathématique pour tous . . . . .	16
Section 4 : une mathématique accessible à tous . . . . .	19
Section 5 : une exigence humaine internationale . . . . .	23
Intermezzo I . . . . .	27
<b>Chapitre II : Mais cette réforme, en quoi consiste-t-elle au juste?</b> . . . . .	29
Section 1 : l'enseignement mathématique traditionnel a-t-il échoué? . . . . .	30
Section 2 : objectifs scientifiques . . . . .	35
Section 3 : objectifs pédagogiques . . . . .	42
Section 4 : pour une culture . . . . .	47
Section 5 : ces objectifs ambitieux, comment les atteindre tous? . . . . .	50
Section 6 : la formation des maîtres . . . . .	56
Section 7 : un plan de réforme ambitieux et praticable . . . . .	63
Annexe 1 : le promeneur, les haricots et le maçon (fable moderne) . . . . .	66
Annexe 2 : mathématique et moyens d'expression . . . . .	69
Annexe 3 : un jeu de fiches perforées . . . . .	76
Annexe 4 : un film mathématique . . . . .	78
Annexe 5 : programmes scolaires et progrès pédagogiques . . . . .	80
Annexe 6 : matériaux pour une petite histoire de la F.P.M. (formation permanente des maîtres) . . . . .	83
Annexe 7 : présent et avenir des I.R.E.M. (instituts de recherche sur l'enseignement mathématique) . . . . .	86
Intermezzo II . . . . .	87
<b>Chapitre III : la réforme en action</b> . . . . .	89
Section 1 : première étape à l'école élémentaire . . . . .	91
Section 2 : relations numériques . . . . .	99
Section 3 : le calcul mécanique . . . . .	104
Section 4 : une approche de la notion de groupe . . . . .	108
Section 5 : la méthode axiomatique et l'enseignement de la géométrie . . . . .	120
Annexe 1 : sur la numération . . . . .	130
Annexe 2 : les nombres en couleurs . . . . .	133
Annexe 3 : des réformes et de leurs animateurs . . . . .	140
<b>Pour ne pas conclure</b> . . . . .	143
Réponses à quelques devinettes . . . . .	145
Programmes 1969-1970 pour les classes de sixième et cinquième . . . . .	147
Programmes pour les classes de seconde A.C.T. . . . .	150
Programmes pour la classe de première . . . . .	159
Programmes pour les classes terminales du second degré . . . . .	173
Matériaux pour une documentation complémentaire . . . . .	190
Matériaux pour un lexique . . . . .	196
Index alphabétique . . . . .	203



Faint, illegible text covering the majority of the page, likely bleed-through from the reverse side.

## NOTE POUR LE BON USAGE DE CE GUIDE

Comme le sommaire l'indique au lecteur, ce guide comporte trois chapitres se subdivisant en sections et complétés éventuellement de quelques annexes.

*Le chapitre I* est une sorte d'introduction, **une description à grands traits** des conditions scientifiques ou pédagogiques dans lesquelles se pose la question de la réforme de l'enseignement mathématique. En section 5, l'exemple de quelques mouvements de réforme dans d'autres pays du monde aide à comprendre comment le problème se pose en France.

*Le chapitre II* traite **l'essentiel du sujet**. En analysant d'abord les mérites et les faiblesses de l'enseignement traditionnel, puis en essayant de préciser quels objectifs une réforme peut se proposer d'atteindre : pour satisfaire à des exigences scientifiques, pour répondre aux vœux d'une pédagogie active, pour fonder une culture. C'est dire que cette réforme est ambitieuse; pour ne pas rester un beau rêve sur le papier, il faut en prévoir les modalités, échelonner leur réalisation, prévoir surtout les moyens matériels et humains pour construire progressivement un nouvel enseignement. Une section concerne spécialement la formation des maîtres. Le chapitre s'achève sur le calendrier des réformes à venir. En annexes, des questions techniques seront laissées de côté par le lecteur pressé. Les autres lecteurs y trouveront, si l'auteur y a réussi, des précisions ou des exemples; certaines des préoccupations actuelles des pédagogues y sont ainsi évoquées (une façon comme une autre d'informer le public sur la vie de l'enseignement).

*Le chapitre III* veut donner, grâce à un choix significatif de quelques thèmes, une idée de **la façon dont la réforme se construit** « de la Maternelle à l'Université ». Les annexes à ce chapitre réunissent des informations sur quelques méthodes particulières ou sur quelques mouvements de réforme particulièrement dignes d'intérêt.

**Pour ne pas conclure** un exposé qui ne veut être qu'une introduction à l'action réformatrice, l'auteur reprend certains des propos par lesquels il commençait : si la réforme des « mathématiques modernes » fait problème, si elle crée chez les maîtres et dans le public ou des remous ou une certaine inquiétude, c'est qu'on n'a pas encore bien pris son parti d'un caractère essentiel de notre temps : la rapide évolution du monde. Une réforme de l'enseignement mathématique commence; puisse-t-elle ne pas finir : vive la réforme permanente!

Pour que le lecteur puisse y participer, une documentation supplémentaire lui sera indispensable; dans un petit guide bibliographique, nous lui signalons « de bonnes adresses ». Et comme, au cours de sa lecture, il aura peut-être achoppé sur certains mots, un lexique lui donne une définition des termes quelque peu complexes. Enfin un index permet de consulter aisément l'ouvrage sur tel ou tel point particulier sans avoir à effectuer une lecture d'ensemble.

La section I du chapitre III précise les nouveaux programmes de l'enseignement élémentaire. Pour donner la même information sur l'enseignement secondaire, on trouvera p. 147 et sq. les programmes rénovés de sixième, cinquième, seconde, première et terminale.

Sous le nom d'Intermezzo, en deux endroits, il a paru utile, pour la détente du lecteur, d'introduire de courts propos badins dont la liaison avec le reste n'est pas d'une évidence aveuglante.

Un aveu, pour finir : l'auteur n'a pas la prétention ridicule d'avoir dressé, dans ce guide, un tableau complet de tout ce qui se fait de mieux en faveur de l'enseignement mathématique. Il a cité des noms de personnes ayant joué ou jouant un rôle dans cet enseignement ou dans sa réforme. Il n'a pas cité tous ceux qui auraient dû l'être s'il s'était agi de dresser un palmarès. Il n'a cité aucun de ceux dont il ignore les noms mais dont il sait que de Cracovie à Berkeley, d'Exeter à Madrid, sous tous les climats et sous tous les régimes politiques, dans une chaire d'université ou dans l'école d'un village de Lozère, à Hambourg ou à Aubervilliers, obscurément peut-être mais avec un dévouement inaltérable, ils accomplissent une tâche dont dépend pour une très large part le bonheur des hommes et des femmes de l'an 2000.

Tous ceux qui ne sont pas cités ont donc la plus belle part : ils enseignent et, avec leurs élèves, ils commencent à construire la mathématique de demain.



POURQUOI UNE RÉFORME

DE

L'ENSEIGNEMENT  
MATHÉMATIQUE ?



Pour qui a des enfants d'âge scolaire ou simplement pour qui s'intéresse aux affaires de l'éducation, l'actualité pose de nombreuses et parfois irritantes questions sur l'enseignement des mathématiques.

Certains partisans de réformes qui s'amorcent d'ailleurs à divers niveaux proclament : « il faut enseigner la mathématique moderne de la Maternelle à l'Université ». Qu'est-ce que cela signifie ? Toute mathématique enseignée en 1970 n'est-elle pas « moderne » ? Ou bien, si cela n'est pas vrai, qu'est-ce qui est *moderne* ? Y a-t-il, dans la science mathématique, des changements si importants que de tels bouleversements soient nécessaires dans l'enseignement élémentaire ? Il y a la télévision en couleurs, les fusées vers Mars, les greffes du cœur et les centrales nucléaires ; peut-on croire qu'en mathématiques, servies comme elles l'ont été aux siècles passés par les Archimède et autres Descartes, il y ait encore de grands progrès possibles ?

Si, dites-vous. Eh bien, soit, mais en quoi ces découvertes modernes concernent-elles l'enseignement élémentaire ? On n'enseigne pas la biologie moléculaire aux petits enfants ; pourquoi faudrait-il transformer les méthodes du cours préparatoire et y introduire, comme vous dites, de la mathématique ? Le bon calcul de toujours n'a-t-il pas fait ses preuves ?

Répondre à ces questions et à d'autres du même genre dont les journaux sont pleins et qui alimentent les débats dans les réunions de parents ou de professeurs, c'est, en un sens, l'objet de ce guide. On voudrait cependant dépasser le niveau du journalisme à sensation, expliquer vraiment certains mots, dégager les grandes idées qui justifient les magnifiques espérances de certains pédagogues et expliquent aussi peut-être les inquiétudes de certains autres, la méfiance ou la crainte manifestée par les défenseurs d'intérêts mis en jeu ou d'autorités contestées. Toute question relative à la formation de la jeunesse, même si elle ne concerne que le problème partiel de la formation mathématique, débouche sur des choix importants dont dépendent immédiatement le sort de millions de jeunes et, à plus longue échéance, le sort du monde.

Puisse cet ouvrage aider *le citoyen de bonne volonté* à comprendre les divers aspects de l'un des problèmes qu'il aura, un jour ou l'autre, à examiner s'il veut mériter son beau titre.

## SECTION 1

---

### DE LA MATHÉMATIQUE PARTOUT

Sur le tableau de Corot intitulé « le chemin de Sèvres », reconnaissez-vous le paysage actuel ? Ce cavalier que le grand peintre a vu descendre lentement vers la capitale serait perdu dans les rues d'aujourd'hui. Ce phénomène d'urbanisation accélérée n'est pas spécial à la région parisienne ; il est de tous les pays ; il correspond à une évolution des activités humaines qui, depuis cent cinquante ans se précipite. Est-elle, cette évolution, moins *visible* que la construction des tours de trente étages ou que les embouteillages de nos routes ? Je prétendrai qu'on peut mettre le phénomène en évidence par le rôle envahissant des notions mathématiques, des techniques correspondantes dans la vie de chacun de nous.

Bien sûr, même du temps de Corot, il y avait dans la ville qu'on aperçoit au loin sur son tableau, des ingénieurs, quelques chercheurs scientifiques, des savants qui avaient recours à des connaissances mathématiques plus ou moins approfondies. Deux ou trois économistes même, en avance sur leur temps, Cournot, par exemple, qui était aussi astronome et historien, voyaient déjà que le champ d'action des mathématiques ne se limiterait pas aux sciences physiques. Mais pour la plupart des hommes de ce temps-là, les mathématiques restaient l'affaire de quelques spécialistes.

Aujourd'hui, ce qui est devenu difficile, c'est de trouver une activité où l'on soit assuré de ne jamais avoir recours à quelque idée, à quelque technique mathématique. Sous la forme, un peu effrayante pour certains, de l'ordinateur, des industries se transforment : l'atelier de l'imprimeur en sera transformé comme l'est déjà la banque. Il n'y a plus de médecine, plus de biologie sans statistique. Plus de linguistique ou de grammaire sans recours aux notions sur les structures mathématiques fondamentales. Pour ne rien dire de l'architecture qui, depuis le Parthénon et même avant, était mariée avec la géométrie, ni de l'astronomie, de la physique ou de la chimie qui ont toujours considéré la mathématique comme leur reine et comme leur servante, autrement dit comme une maîtresse bien-aimée qu'on fait beaucoup souffrir.

Seulement, même dans ces domaines où le recours aux mathématiques est classique, les besoins d'aujourd'hui ne sont plus ceux d'hier.

## DU DÉBARQUEMENT SUR LA LUNE...

Pensez, — c'est un premier exemple très évident —, à la *mécanique céleste*. Au XVIII<sup>e</sup> siècle, dans le sillage de Newton, les savants ont étudié le mouvement des planètes. Les grands mathématiciens y ont tous collaboré : Euler, Gauss, d'Alembert, Laplace... Travaux qui ont trouvé une sorte de couronnement dans les calculs de Le Verrier prédisant, en 1846, qu'une planète plus lointaine que la plus éloignée du Soleil, Uranus, pourrait être observée dans une certaine direction : l'astronome Galle, à l'Observatoire de Berlin, put constater en effet l'existence de cette planète inconnue, qui fut appelée Neptune. Qu'y a-t-il pourtant de commun entre les remarquables calculs de Le Verrier et les calculs d'orbite des satellites Terre-Lune? Bien sûr, au fond, c'est la même mécanique, la même analyse mathématique qui est utilisée, aux enrichissements, aux perfectionnements près acquis en plus de cent ans. Mais dans la forme, dans la précision exigée, quels changements! Sans les moyens modernes de calcul, le débarquement sur la Lune au point prévu, le retour sur Terre, à quelques kilomètres près, aurait été impossible et personne n'aurait eu l'audace d'entreprendre le voyage. Je n'entends pas minimiser les prouesses techniques que représentent les lancements de satellites; je veux simplement dire que ceux-ci seraient irréalisables, aussi importants que soient les progrès technologiques, sans le soutien mathématique qui assure leur mise en œuvre.

## ... AUX GRANDES CENTRALES NUCLÉAIRES

Il en est ainsi dans presque tous les domaines de la recherche scientifique. Pensez à l'appareillage des centres de *recherche nucléaire*. Les grands accélérateurs de particules, qui sont indispensables à l'étude fine ou ultrafine de la matière, sont des monstres dévoreurs de crédits... et de mathématiques. La mise au point de tels projets requiert la coopération de chercheurs et d'ingénieurs de disciplines très variées. La mathématique est leur langue commune, leur outil commun.

Les appareils construits — ce grand accélérateur européen certainement plus difficile à concevoir que le château de Versailles, ces usines séparatrices d'isotopes, ces grands complexes chimiques... —, l'exploitation des résultats qu'ils fournissent donnent encore des occasions aux mathématiques d'intervenir. D'ailleurs si vous ouvrez n'importe quel traité récent de physique, de chimie ou même de biologie, si vous avez dépassé la première difficulté du vocabulaire spécial à la science considérée, c'est sur une formule mathématique que vous ne vous attendiez pas à trouver là que vous buterez peut-être. Vous rencontrerez des admirateurs inconditionnels de la « règle de trois » qui vous objecteront que tout pourrait aussi bien être exprimé par cette grande trouvaille des Babyloniens! Ne vous laissez pas intimider par ces déclarations péremptoires : ni Newton, ni Einstein n'ont conçu le calcul différentiel ou le calcul tensoriel pour « faire les malins »; ils en avaient

besoin. La science d'aujourd'hui s'exprime en mathématique d'aujourd'hui, compagnes liées par le même destin...

## L'ÈRE DES ORDINATEURS

Revenons sur une expression employée un peu plus haut et dont je ne voudrais pas qu'elle passe inaperçue. J'ai parlé du soutien mathématique assurant la mise en œuvre des progrès technologiques : c'est invoquer le rôle des ordinateurs, ces prodigieuses machines qui étonnent par leurs prouesses et inquiètent tout en même temps; le robot construit par l'homme qui tuera l'homme n'est-il pas en train de naître? La mathématique moderne aura-t-elle enfanté ce monstre, qui l'anéantira?

Quant à la paternité, aucun doute n'est possible; l'*informatique* est fille de la mathématique moderne. Bien sûr, comme dans la vie, s'il y a eu un père il y a eu aussi une mère et sans l'électronique l'informatique n'aurait pas vu le jour. Mais, avant de sucer le lait des transistors, l'ordinateur a puisé ses idées, c'est-à-dire son programme, dans la tête du mathématicien. De Leibniz à Boole, de Frege à Gödel, c'est dans le creuset des réflexions les plus abstraites sur les fondements de la mathématique et sur la logique que les concepts de base de l'informatique se sont formés.

Voici par exemple un jeune enfant qui manipule des objets de formes et de couleurs diverses; il sait mettre à part les objets qui ont la double propriété d'être « ronds et verts »; il constate alors que ceux qui restent ont la propriété d'être « non ronds ou non verts ».

Autrement dit, nier la proposition « cet objet est rond et vert » pourra se dire « cet objet n'est pas rond et vert », ou encore « cet objet est non rond ou non vert ». Ce jeune apprenti commence-t-il ses études de logicien ou bien commence-t-il à s'initier à l'utilisation des ordinateurs, qui seront plus tard ses outils de prédilection? Il serait bien difficile de répondre.

Une ère nouvelle commence. Il y a eu, dans l'ère industrielle, l'étape de la vapeur, l'étape de l'électricité; celle de l'énergie atomique marque une évolution de la même nature : d'une étape à la suivante, il y a expansion des sources d'énergie, ouverture, par conséquent, d'un champ nouveau à l'activité humaine. Tout en se poursuivant, cette évolution, par le fait de l'informatique, change de nature : l'*ère de l'automatisation* est commencée. Alors les conditions matérielles de la production ne sont pas seules à être transformées, mais ses conditions sociales également, ou même beaucoup plus profondément.

D'autant qu'il ne faudrait pas croire l'informatique et ses applications cantonnées dans les techniques de fabrication ou dans la recherche. Une idée de base de l'informatique est celle de l'organisation, du programme. Chercher à augmenter l'efficacité des efforts qu'il faut dépenser pour l'accomplissement d'une tâche, depuis les temps primitifs, l'homme ne fait rien d'autre. Les moyens dont il dispose aujourd'hui lui permettent d'y réussir, au moins partiellement, dans presque tous les domaines.

Il y a l'*organisation* même du travail et la *gestion des entreprises*. Le renouvellement des stocks pose un problème classique du calcul des probabilités. Le plan de production d'une fabrique utilise la méthode dite des programmes linéaires, qui recourt à des techniques algébriques assez élaborées. Sans les ordinateurs, la comptabilisation des opérations bancaires serait un travail inextricable pour une armée d'employés dont la tâche serait très fastidieuse. Il en est de même, pour un grand quotidien, de la gestion de son fichier d'abonnés.

Plus surprenante, plus lente aussi à se développer (tout au moins, au début) a été l'analyse mathématique au service des sciences humaines. Pour commencer, il n'y eut qu'un usage (et parfois même un abus) de la statistique en géographie, en sociologie, en psychologie. C'était n'utiliser que l'aspect numérique de la mathématique. Il y en a bien d'autres, la combinatoire, en particulier, que les sociologues ont su exploiter. Au programme, désormais, des étudiants des facultés des lettres et sciences humaines, figurent d'importants chapitres d'algèbre, une étude des fonctions linéaires, exponentielles, logarithmes. Les linguistes eux-mêmes s'en serviront : les progrès d'une *linguistique quantitative* sont révélateurs.

\* \* \*

Je ne veux pas, pour l'instant, prolonger cette énumération déjà fastidieuse. A bien d'autres occasions, au cours de ce livre, réapparaîtront, sous divers éclairages, ces exemples ou d'autres attestant la présence d'une réflexion ou d'une activité mathématique. Chacun de nous peut le vérifier chaque jour : il y a des mathématiques partout, de la mathématique partout.

Mais alors, une autre question se pose, suggérée par plusieurs des remarques précédentes : cette mathématique envahissante, est-ce celle qui fut conçue par les Grecs de l'antiquité, ou bien celle de Descartes, ou bien celle qu'on baptise « moderne » ? Des mathématiques partout, autrement dit de bonnes mathématiques classiques de toujours ou bien de la mathématique moderne partout ?

Il ne s'agit pas d'une querelle de mots ou même seulement d'orthographe. Il n'y a pas, de notre temps, avènement d'une mathématique nouvelle qui remplacerait l'ancienne. Il y a une mathématique envahissante et si elle l'est c'est qu'elle est de notre temps. De ce point de vue, et provisoirement, on peut convenir de la dire moderne.



## SECTION 2

---

### DE LA MATHÉMATIQUE MODERNE : ESQUISSE A GRANDS TRAITS

Seulement dire que cette mathématique envahissante est moderne parce qu'elle est de notre temps, n'est-ce pas une simple lapalissade?

Il y a du vrai dans cette remarque. D'autres époques ont connu le conflit des classiques et des modernes, même en mathématiques. On est toujours le moderne de quelqu'un comme on est toujours le fils ou la fille de ses parents. Pour les mathématiciens du xvii<sup>e</sup> siècle, Descartes était un moderne alors que beaucoup de contemporains le rangeront dans les grands précurseurs de l'époque classique.

Pourtant, dans cette lapalissade, il y a tout de même une information utile. Combien de personnes, en effet, sont convaincues que les mathématiques sont construites une fois pour toutes, ou, mieux encore, l'ont été de façon si parfaite par les grands savants de l'antiquité que nous devons seulement aujourd'hui les répéter, les « réciter »! Bien sûr, nous ne négligerons pas cette école; nous profiterons des leçons données par ces chercheurs grâce à leurs découvertes ou même par leurs échecs. Mais nous ne devons pas oublier que la mathématique est une science vivante (comme s'il pouvait y avoir une science morte! Ce ne serait plus une science). Chaque étudiant la réinvente, chaque époque la reconstruit avec ses exigences de rigueur; celles-ci, en 1830, n'étaient plus celles de 1750, ce ne sont plus les nôtres. Il y a une histoire de la pensée mathématique, de même qu'il y a une histoire de la philosophie : après Descartes on ne pouvait plus penser comme avant lui, mais penser par soi-même restait une exigence individuelle comme elle le restera toujours. Entrer dans tous les détails de l'évolution des idées en mathématiques au cours des siècles nous entraînerait trop loin. Pour l'instant, je ne retiens que cette réalité : la mathématique évolue parce qu'elle est œuvre humaine.

Pourquoi donc insister aujourd'hui sur ce qualificatif « moderne », s'il est de tous les temps? Qu'a-t-il, aujourd'hui, de plus *actuel*?

Peut-être sommes-nous mal placés pour en juger, nous qui vivons justement ce temps actuel. Il est fort possible que dans un siècle l'évolution rapide à laquelle nous sommes sensibles apparaisse à nos successeurs comme une lente amorce d'un phénomène plus ample. Mais nous ne sommes pas

les historiens de l'avenir; tout au plus les acteurs de notre temps, cherchant à le comprendre. Qu'est-ce donc qui est spécifiquement *moderne* dans la mathématique d'aujourd'hui?

## 1. PRIORITÉ DE L'ALGÈBRE

Une première réponse sera encore d'un caractère semi-historique : en 1931, paraissait à Berlin *Moderne Algebra* par Van der Waerden, ouvrage reprenant les idées présentées depuis quelques années par Emil Artin et Emmy Noether dans leurs cours à l'Université de Hambourg. Sous le nom d'*algèbre moderne* s'est ainsi développée une conception relativement nouvelle mais qui plonge ses racines dans des recherches plus anciennes, celles de Galois par exemple (1830) : l'accent est mis sur les propriétés des relations entre les êtres plutôt que sur les êtres eux-mêmes; disons, pour simplifier, sur l'opération plutôt que sur son résultat. Le domaine de l'algèbre connaîtra dès lors une extraordinaire extension; ces êtres ne sont plus seulement les nombres mais aussi des objets de la géométrie ou, plus généralement, tous les êtres susceptibles d'un traitement mathématique. Autrement dit, l'algèbre est devenue une sorte de langue universelle de la science.

**Cette importance de l'algèbre comme moyen d'expression est un aspect moderne à retenir.**

## 2. VERS UNE PLUS GRANDE GÉNÉRALISATION

En algèbre même, il lui correspond *le souci de plus grande généralité* et, par conséquent, l'accès à *un niveau d'abstraction supérieur*. Pour beaucoup de non-initiés, l'algèbre consistait à calculer « sur des lettres », étant entendu que ces lettres représentaient des nombres. C'est ce dernier sous-entendu qui n'est plus de mise aujourd'hui; quels que soient les objets, les êtres soumis au calcul et représentés par des lettres, ce qui importe c'est seulement leur façon de se comporter dans les opérations. Le même calcul s'appliquera à tel ensemble de nombres, par exemple  $\{0, 1, 2, 3\}$ , et à tel ensemble de rotations (celles qui permettent de placer un carreau de cuisine dans son logement...). Qu'importe l'objet (ou mieux, qu'importent les objets) pourvu qu'on ait les opérations! Si l'algèbre a pu devenir langage commun de toutes les sciences (au moins dans leur partie mathématisée), c'est au prix de cet effort de « désincarnation » : outil pour l'expression mais qui, par lui-même, n'exprimerait rien, à la limite.

Fournir aux utilisateurs des mathématiques, de plus en plus nombreux comme on l'a vu plus haut (section 1) et opérant dans des domaines de plus en plus variés, des outils pouvant servir à tous : tel est un des buts de la mathématique moderne. Même s'il fut toujours entendu que les mathématiques aspirent à la généralisation, on peut, je crois, reconnaître que cette aspiration prend une ampleur originale aujourd'hui. S'il fallait retenir



un seul caractère pour justifier le caractère « moderne » de la mathématique contemporaine, c'est celui que je retiendrais. A partir de lui, tous les autres aspects de la science contemporaine s'ensuivent.

En premier lieu, le caractère très abstrait qui lui est souvent reproché, « trop abstrait » ont été jusqu'à dire certains critiques. Il est vrai qu'il y a dans l'abstraction des niveaux successifs et que paraît souvent inaccessible à l'étudiant, ou à plus forte raison au néophyte, le niveau auquel il n'a pas encore atteint. Nous retrouverons cette question de l'abstraction lorsque nous examinerons les travaux des psychologues et des pédagogues. Contentons-nous pour l'instant de reconnaître que les mathématiciens contemporains ont parfaitement conscience d'être des abstrauteurs; ils ne s'en cachent pas (c'était un ministre point du tout mathématicien qui réclamait des « mathématiques concrètes »), ils disent avec raison que si l'on veut formuler des théories polyvalentes, il faut en passer par là. Le passage par l'abstrait est une nécessité qui tient à la polyvalence recherchée. D'importantes conséquences devront en être tirées quant aux enseignements d'initiation (voir plus loin, section 4).

### 3. UNE RECONSTRUCTION DANS TOUS LES DOMAINES

Sur le plan de la mathématique elle-même, il en est aussi résulté que c'est l'ensemble de l'édifice qu'il a fallu reconstruire, qu'il faut, constamment, réaménager. Depuis les domaines qui jouxtent ceux de la philosophie et de la logique jusqu'à ceux qui apparaissent encore aujourd'hui comme débouchant sur les problèmes de la physique. Il n'y a donc pas, dans la mathématique, tel secteur qui serait « moderne » pendant que tel autre resterait « classique ». La cohésion de l'ensemble est trop forte, justement soulignée par le singulier : *la mathématique*, pour qu'il soit possible d'imaginer, ou dans la recherche ou dans l'enseignement, quels qu'en soient les niveaux, des secteurs « à l'abri » du courant moderne. Je risquerai ici une comparaison : une fois découverts les télescopes, comment imaginer qu'un chercheur en astronomie s'en passerait sous prétexte que Hipparque n'utilisait aucun instrument d'optique? S'il dispose, aujourd'hui, de la puissante méthode axiomatique (Cf. Chapitre III, section 5), croit-on qu'un mathématicien se condamnera à une certaine impuissance par respect (!) de la tradition?

**Développement de l'algèbre, aspiration à la plus grande polyvalence des théories, réorganisation en permanent perfectionnement de l'édifice mathématique tout entier ne sont que certains des caractères de modernité de cette mathématique.** La suite de ce livre devrait permettre de compléter un portrait seulement esquissé ici et peut être impossible à saisir tant son devenir est rapide. Au moins pouvons-nous concevoir l'une des raisons de cette évolution : s'adapter aux besoins croissants de mathématiques dans les diverses branches de l'activité humaine. Chacun, dans la mesure de son possible, mathématise et attend, de cet effort, un accroissement de ses moyens d'action. S'il y a passage laborieux par l'abstrait, on en attend grand fruit. Faut-il réserver cette capacité à quelques privilégiés?

## SECTION 3

---

### DE LA MATHÉMATIQUE POUR TOUS

Rassurez-vous, ce titre n'annonce pas l'avènement d'une sorte d'impérialisme mathématique. Il ne s'agit pas de créer un monde où nous serons tous des mathématiciens spécialistes, très capables sans doute de concevoir ou d'organiser, sans qu'il n'y ait plus personne pour exécuter,... ou faire autre chose. Mais puisque tous les citoyens, tous les travailleurs d'aujourd'hui et de demain ont et auront besoin d'une formation mathématique de base, il faut assurer celle-ci à tous.

Oui, à tous, en raison d'abord de cette « utilité pratique » dans toutes les activités de nos sociétés comme on l'a assez dit plus haut (section 1). A tous, aussi, parce que l'orientation précoce des élèves ou même des étudiants est une impossibilité. On l'a tentée parce que cela simplifierait diablement l'organisation scolaire (25 % de scientifiques, 18,5 % de littéraires..., comme ce serait commode pour prévoir les constructions scolaires!); l'incertitude de beaucoup de parents quant à l'avenir de leurs enfants en serait d'autant apaisée : résurgence du « tu seras polytechnicien! ». Il a fallu déchanter; la matière humaine ne se laisse pas aussi facilement cataloguer, les besoins futurs de nos sociétés ne se laissent pas aussi rigoureusement prévoir.

A tous, enfin, parce que chaque être humain doit pouvoir accéder à la connaissance pour elle-même.

### FORMATION DE BASE

Pour toutes ces raisons à la fois, la formation mathématique de base, dans l'esprit moderne, convient à tous. La définition d'un lot de connaissances mathématiques dites utiles pouvait se concevoir du temps où il était permis d'escompter que tel groupe d'élèves déboucherait dans la chaudronnerie et tel autre dans les activités bancaires. Bien fol est aujourd'hui celui qui se permet de telles prévisions. Il est plus sûr de prévenir l'élève ou l'étudiant : « sachez que ce que vous apprenez aujourd'hui ne vous servira directement à rien; nous ne savons pas quels seront vos besoins; ce que nous

vous apprenons, il faudrait que cela vous aide à vous adapter aux conditions imprévisibles dans lesquelles vous aurez effectivement à observer, réfléchir, concevoir, agir, juger... Au fond, nous voudrions vous préparer à vivre en hommes ou femmes responsables, c'est-à-dire libres dans leur réflexion, leurs actes et leurs jugements ».

Un lourd bagage de connaissances encyclopédiques serait alors plus encombrant qu'utile; si encombrant même qu'il découragerait toute personne lucide de s'en charger. Des outils intellectuels adaptés (autant que cela est possible) à des situations encore inconnues, une formation mathématique peut contribuer efficacement à les forger.

## LES QUATRE LANGAGES

Non à elle seule, bien sûr. *Langue maternelle* et *langues étrangères* vivantes sont des instruments de communication irremplaçables; un enseignement de *technologie*, hélas encore à peine organisé, devrait donner une formation de base certainement indispensable dans notre civilisation. Brochant sur le tout, *la mathématique*, langue universelle, complète l'outillage dont chacun doit être pourvu s'il ne veut pas vivre en infirme ou en sujet.

Insistons un peu sur cette « théorie » des quatre langages qui a parfois été mal comprise : n'y a-t-on pas vu une spécialisation prématurée? Ou bien la mort des études classiques, celle des langues anciennes en particulier? Toute formation suppose un choix; il faut d'ailleurs distinguer le choix de la collectivité pour ses enfants et le choix de l'élève ou de l'étudiant. Si les goûts ou les aptitudes jouent à plein dans ce dernier cas — et un large éventail d'options doit permettre à l'élève de l'exercer librement —, le choix des disciplines de base, utiles à tous et à chacun, doit être l'œuvre réfléchie de la collectivité. Or il n'est pas possible de faire entrer toutes les disciplines intellectuelles dans cette formation de base, au risque de reconstituer, à un changement de nom près, un enseignement encyclopédique qui est l'opposé d'une formation.

Sans une maîtrise suffisante de la langue maternelle, tout le monde convient qu'aucune formation n'est possible. Au siècle des communications rapides, alors que les contacts internationaux commencent enfin à se multiplier, toute mesure qui restreindrait l'apprentissage des langues vivantes étrangères serait attentatoire à la liberté de l'individu (ne serait-ce que sur le plan de l'information). Ignorer l'emprise des techniques sur notre existence serait aussi absurde; il suffit pour s'en convaincre de constater avec quelle peine de vieilles gens s'adaptent à des nouvelles conditions de vie (bien sûr, on devrait les aider; mais de leur part, dans les cas les plus tragiques, il y a l'absurde refus d'une évolution inévitable). La formation mathématique de base apporte dans cet ensemble éducatif le complément indispensable : esprit d'observation et d'analyse; apprentissage de la conceptualisation (de l'observation d'une situation à l'idée abstraite); apprentissage de la déduction et, plus généralement, développement de l'esprit logique; retour à l'observation et à l'expérience pour éprouver la validité des notions

abstraites élaborées ainsi que des théories construites par la voie déductive. J'ai écrit « complément indispensable » : je me demande s'il ne serait pas plus sage de parler d'apprentissage de la pensée rationnelle.

Enseignement qui doit, évidemment, s'imbriquer dans celui des autres disciplines : il n'y a pas qu'en mathématiques qu'il faut penser juste et s'exprimer clairement. La théorie des quatre langages comporte d'ailleurs la prise au sérieux d'un système d'options permettant à chacun d'éprouver ses goûts, de manifester ses aptitudes dans tous les domaines. J'ai dit « prise au sérieux » parce que, jusqu'à présent quand il y a option, on pense enseignement de seconde zone. Toute option doit au contraire être considérée comme élément constitutif d'une véritable formation culturelle. Elle donnera d'ailleurs maintes occasions d'utiliser les quatre langages et motivera donc les études de base.

Encore faudrait-il que cette formation mathématique nécessaire à tous soit accessible à tous; est-ce possible?

## SECTION 4

---

### UNE MATHÉMATIQUE ACCESSIBLE A TOUS

Si elle ne l'était pas, ce guide perdrait beaucoup de son sens. En tout cas, face aux besoins de la société en personnels qualifiés et surtout capables de s'adapter rapidement à des situations nouvelles, face aux devoirs de l'individu envers lui-même (comprendre le monde dans lequel il vit et savoir y jouer un rôle), le temps n'est plus d'une mathématique réservée aux *happy few*.

### UNE MATHÉMATIQUE POUR L'ÉLITE ?

Il existe encore des partisans de cette formation, de cette « haute formation pour une élite » qui avait une certaine efficacité pratique quand il y avait, dans deux domaines bien séparés, ceux qui concevaient ou géraient ou dirigeaient et, d'autre part, ceux qui n'avaient qu'à obéir et exécuter. Une certaine conception traditionnelle de l'enseignement a puisé dans ces conditions sinistres une sorte de pessimisme sur les possibilités des enfants vis-à-vis de la mathématique. Lorsqu'on se proposait seulement de déverser dans les jeunes cervelles quelques formules « utiles », quelques recettes éprouvées (parmi lesquelles il fallait faire un sort spécial à la « règle de trois »), on regardait peu à faciliter l'approche des notions, à préparer la voie aux abstractions. On exigeait tout de la mémoire : savoir ses tables, tout comme il fallait savoir ses départements (préfectures et sous-préfectures). On avait la pudeur de ne pas trop s'étonner des échecs mais il était un peu osé d'affirmer que la plupart des écoliers étaient peu doués ; on ne leur donnait en effet aucune occasion de manifester puis de développer leurs dons.

Dans cette conception traditionnelle, tous les efforts pédagogiques étaient consacrés à la préparation, à l'entraînement des champions. L'idée de réserver les meilleurs professeurs (à supposer qu'on puisse, qu'on sache les distinguer) aux meilleurs élèves (à supposer qu'on dispose de critères pour les sélectionner) a encore ses partisans. Certaines classes préparatoires aux concours de grandes écoles fondent ainsi leur réputation et personne ne



pourrait y trouver à redire sur le plan de l'enseignement mathématique si, par contrecoup, l'enseignement pour tous ne se trouvait d'autant négligé<sup>1</sup>.

Dans ce que, pour aller vite, on appelle « rénovation de l'enseignement mathématique », il y a heureusement conjonction d'une réforme des contenus et d'une réforme non moins importante des méthodes didactiques; c'est un véritable changement d'orientation, une réforme en profondeur, *une nouvelle conception de l'enseignement mathématique*.

## UNE NOUVELLE PÉDAGOGIE MATHÉMATIQUE

Celle-ci est fondée sur l'heureuse conjonction des idées dites modernes, en mathématiques, et des découvertes des sciences de l'éducation sur la formation des concepts dans l'esprit de l'enfant ainsi que sur les techniques des divers apprentissages. Ce qui a été dit des premières (section 2) ci-dessus devra être complété. Il sera encore plus utile d'examiner en détail, autant que nous le pourrons, l'apport actuel des sciences de l'éducation. Il faut cependant tout de suite insister sur l'accord parfait qui existe entre les exigences de la mathématique dite moderne et les recommandations que les chercheurs en psychologie et en pédagogie peuvent faire à ceux qui enseignent. Pour simplifier, résumons-les en quelques sentences un peu schématiques.

— *Priorité à l'action de l'élève*. Il s'agit d'éviter à tout prix que l'élève accepte passivement des instructions, des définitions, des abstractions formulées par le maître. Pour aller vite (en apparence) celui-ci est toujours tenté d'imposer sa conception; par paresse, l'élève ne déteste pas cette science toute faite mais, au bout d'un certain temps, il ressent une impression de gavage; l'enseignement dogmatique engendre le dégoût pour l'étude, le pire des échecs. Le rôle (difficile) du maître est de provoquer l'action de l'élève : importance du choix des situations à étudier, des questions à poser et de la façon de les poser. Rôle difficile car le maître doit résister à l'envie d'imposer sa conception, d'éviter des errements alors que ceux-ci sont, très souvent sinon toujours, profitables.

— *C'est à l'élève d'observer, d'analyser*. Il est donc préférable d'éviter les questions trop précises. Bien apprendre à chercher, c'est apprendre au chercheur à se poser des questions. Parmi les moyens d'éviter les questions trop précises (et dont la formulation indique parfois quelle sorte de réponse en est attendue), le recours à des matériels didactiques bien conçus est souvent très efficace. Il existe, à ce sujet, une riche expérience accumulée par les

---

1. Précisons, sans nous y attarder, que l'Inspection générale de Mathématiques est directement issue du corps des professeurs des classes préparatoires aux grandes écoles scientifiques; même lorsqu'elle a la charge de l'ensemble des études du second degré, elle réserve tous ses soins et oriente son action en priorité dans un sens favorable aux classes préparatoires. Ce sont de telles circonstances, dérisoires semble-t-il, qui expliquent peut être l'incapacité de l'Inspection générale à jouer un autre rôle que celui du frein dans la réforme de l'enseignement mathématique.

maitresses d'École Maternelle (le fait que leurs élèves ne savent pas écrire, en général, les a contraintes à mettre l'accent sur les manipulations : « Il faut aussi des mains pour instituer un langage... » disait Paul Valéry<sup>1</sup>). Aux divers niveaux de l'enseignement, des matériels divers, imaginés ou construits par les élèves eux-mêmes, recèlent des richesses mathématiques insoupçonnées. Nous verrons plus loin plusieurs exemples de matériels conçus pour le premier apprentissage du calcul et dont les utilisateurs ont mis en évidence des structures qui étaient inconnues des fabricants ou inventeurs.

— *C'est à l'élève d'abstraire.* Étape capitale qu'il ne faudrait surtout pas « brûler » sous prétexte que l'élève tarde à concevoir l'abstraction que le maître, lui, a depuis longtemps acquise. L'abstraction imposée n'a aucune valeur pour celui à qui elle est imposée; il l'accepte, le plus souvent, sans en bien concevoir la portée. Au contraire, s'il la conquiert au terme de nombreuses observations ou discussions (avec des élèves, comme lui, en mal d'abstraire), il sait « de quoi il retourne »; ce n'est pas une notion étrangère à son esprit.

— *C'est à l'élève de déduire.* S'il en a les moyens logiques (l'expérience a montré des aptitudes limitées, mais certaines, à la déduction chez des enfants de cinq ans), et surtout s'il en ressent le besoin.

— *C'est à l'élève d'appliquer.* C'est-à-dire d'utiliser ses connaissances, ses acquisitions.

## UN NOUVEAU CLIMAT DANS LA CLASSE

Au maître, par conséquent, revient une tâche nouvelle. Il s'agit moins pour lui de déverser son savoir dans la tête de ses élèves que de leur préparer des situations enrichissantes. Il s'agit d'être prêt à répondre aux questions les plus incongrues, de savoir guider vers les indispensables synthèses et, dans certains cas, de savoir soi-même tirer, de certaines observations partielles ou maladroitement, ce que de plus habiles auraient su découvrir (tout en laissant cependant aux élèves la plus belle part, celle de la découverte). Tâche ardue, tant sur le plan mathématique (il faut dominer, maîtriser un sujet pour comprendre les maladroitement approches des débutants et savoir orienter leurs pas) que sur le plan psychologique (apprendre à ne pas dire non à qui se fourvoie, apprendre à corriger sans décourager, apprendre à comprendre les formulations « incompréhensibles »,...) ou sur le plan purement humain (plus question pour le maître de briller, du haut d'une chaire; avec ses élèves, il est un artisan au travail). Mutation de la fonction enseignante qui n'est pas sans grandeur, celle de l'humilité.

Celle aussi de la fraternité. Le dialogue entre élèves et maîtres est une condition indispensable pour ce genre de travail; l'obstacle que créait, pour ce dialogue, le cours magistral, n'existe plus si l'élève sent que le

---

1. Dans son *Discours aux chirurgiens* (Variété).



Pourquoi une réforme de l'enseignement mathématique ? Pourquoi enseigner une mathématique moderne à tous les enfants de la Maternelle à l'Université ? Faut-il souhaiter cette refonte simultanée des programmes et des méthodes dès le cours préparatoire, dès les débuts de l'enseignement secondaire ? Tous les parents et beaucoup de citoyens se posent ces questions, non sans inquiétude parfois. Tous ressentent le besoin de comprendre les motifs et les buts des réformes qui sont peu à peu mises en place.

Pour répondre à ces questions, Gilbert Walusinski, professeur de mathématiques aux lycées de Saint-Cloud, a écrit ce guide en s'appuyant et sur son expérience de l'enseignement dans les deux cycles secondaires et sur celle que lui ont valu plus de quinze années d'activité au sein de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, dans les équipes de formation permanente des maîtres ou dans des réunions d'information des parents d'élèves.

### **Ce guide blanc**

- Vous explique pourquoi la réforme est inéluctable et comment l'enseignement rénové préparera mieux la jeunesse à affronter le monde qui sera le sien dans dix ou vingt ans ;
- Vous décrit les objectifs scientifiques et pédagogiques de cette réforme ;
- Vous explique pourquoi la mathématique moderne n'est pas réservée à une certaine élite mais développe des facultés essentielles, imagination et rigueur en particulier, capacité d'abstraire surtout, chez tous les esprits ;
- Vous informe sur les programmes actuellement en vigueur dans les enseignements primaire et secondaire.

En vous informant et en vous donnant des explications sur la réforme de l'enseignement mathématique, ce guide veut vous aider à mieux remplir le rôle d'éducateur que tout citoyen d'une démocratie doit assumer.

BIBLIOTHEQUE NATIONALE DE FRANCE



3 7502 00440348 3

**armand colin**

Participant d'une démarche de transmission de fictions ou de savoirs rendus difficiles d'accès par le temps, cette édition numérique redonne vie à une œuvre existant jusqu'alors uniquement sur un support imprimé, conformément à la loi n° 2012-287 du 1<sup>er</sup> mars 2012 relative à l'exploitation des Livres Indisponibles du XX<sup>e</sup> siècle.

Cette édition numérique a été réalisée à partir d'un support physique parfois ancien conservé au sein des collections de la Bibliothèque nationale de France, notamment au titre du dépôt légal. Elle peut donc reproduire, au-delà du texte lui-même, des éléments propres à l'exemplaire qui a servi à la numérisation.

Cette édition numérique a été fabriquée par la société FeniXX au format PDF.

La couverture reproduit celle du livre original conservé au sein des collections de la Bibliothèque nationale de France, notamment au titre du dépôt légal.

\*

La société FeniXX diffuse cette édition numérique en accord avec l'éditeur du livre original, qui dispose d'une licence exclusive confiée par la Sofia – Société Française des Intérêts des Auteurs de l'Écrit – dans le cadre de la loi n° 2012-287 du 1<sup>er</sup> mars 2012.

Avec le soutien du

